RECIBIDO EL 21 DE OCTUBRE DE 2020 - ACEPTADO EL 22 DE ENERO DE 2021

CARACTERIZANDO EL PENSAMIENTO VARIACIONAL DESDE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y LA TEORÍA FUNDAMENTADA

CHARACTERIZING VARIATIONAL THINKING FROM PROBLEM RESOLUTION AND THE GROUNDED THEORY

Luis Fernando Mariño[1],

Rosa Virginia Hernández[2]

RESUMEN

La investigación sirve el propósito de realizar aportes en la caracterización del pensamiento variacional manifestado por un grupo de 24 estudiantes que se forman para ser profesores de matemáticas, cuando resuelven problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas de la forma $ax+by = c$. El estudio tuvo un enfoque cualitativo con un diseño desde la teoría fundamentada. La estrategia metodológica, estuvo compuesta por un trabajo paralelo entre tres intervenciones que agruparon actividades didácticas como fuentes de datos, los procesos de codificación abierta, axial, selectiva y el análisis de datos permeados siempre por el método de comparación constante, que condujo al muestreo y saturación teórica. Los hallazgos evidencian la forma de pensar variacional de los participantes cuando a partir de sustituciones y combinaciones de números enteros en la ecuación, establecen nexos y relaciones que los llevan a formalizar, generalizar y probar. Como resultado se caracterizó el pensamiento variacional como proceso en la resolución de problemas, conformado por los subprocesos transformar, formalizar, generalizar y probar variacionalmente. Los resultados implican que es posible seguir avanzando en caracterizar el pensamiento variacional desde diversos contextos.y diferentes dominios.

PALABRAS CLAVE: Pensamiento Variacional, Resolución de Problemas, Teoría Fundamentada, Ecuaciones Lineales diofánticas.

1 Licenciado en Matemáticas y Computación. Magister en Educación Matemática. Universidad Francisco de Paula Sanatander. Correo. fernandoml@ufps.edu.co. Orcid: https://orcid.org/0000-0002-3438-6963

2 Licenciada en Matemáticas y Computación. Magister en Educación Matemática. Universidad Francisco de Paula Sanatander. Correo. rosavirginia@ufps.edu. Orcid: / orcid.org/0000-0002-2638-671X

ABSTRACT

The purpose of the research was to contribute to the characterization of the variational thinking manifested by a group of 24 students who are training to become mathematics teachers, when they solve problems involving linear diophantine equations of the form ax+by=c. The study had a qualitative approach with a grounded theory design. The methodological strategy was composed of a parallel work between three interventions that grouped 11 didactic activities as data sources, the processes of open, axial, selective coding and data analysis always permeated by the method of constant comparison, which led to sampling and theoretical saturation. The findings show the variational way of thinking of the participants when from substitutions and combinations of integers in the equation, they establish links and relationships that lead them to formalize, generalize and prove. As a result, variational thinking was characterized as a process in problem solving, made up of the subprocesses transforming, formalizing, generalizing and proving variationally. The results imply that it is possible to continue advancing in characterizing variational thinking from different contexts and different domains.

KEYWORDS: Variational Thinking, Problem Solving, Grounded Theory, Diophantine Linear Equations.

1. INTRODUCCIÓN

El pensamiento variacional ha sido caracterizado desde diferentes contextos y finalidades. Para algunos investigadores el razonamiento es una forma de pensar y siguen los trabajos de Jere Confrey y Guershon Harel (Thompson y Carlson, 2017). Estos autores describieron la naturaleza del pensamiento como razonamiento covariacional (Confrey, 1991; Confrey y Smith, 1994; Confrey y Smith, 1995), cuantitativo (Thompson y Thompson, 1992, Abril; Thompson P., 2011; Thompson P. , Carlson, Byerley, y Hatfield, 2014), continuo y discreto (Castillo-Garsow, 2012; Castillo-Garsow, Johnson, y Moore, 2013), entre otros.

En contraste a lo anterior Smith (2008, 2017) se refirió al pensamiento funcional como pensamiento representacional. Mientras que Blanton y Kaput (2011) siguiendo esta misma línea establecieron seis categorías para caracterizar el pensamiento funcional. Desde otra mirada, Caballero y Cantoral (2013), consideraron que para caracterizar el pensamiento variacional deben articularse los sistemas didácticos con las prácticas sociales que dan vida a la matemática desde la variación y el cambio y lo denominaron pensamiento y lenguaje variacional.

Por su parte Vasco (2003), caracterizó el pensamiento variacional como una forma de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables. Entre tanto, el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 2006), tiene una visión más amplia acerca del pensamiento variacional relacionda con: reconocer, percibir, identificar, modelar, representar y caracterizar la variación y el cambio desde diferentes contextos.

La resolución de problemas por su parte ha hecho valiosos aportes, tanto en la investigación como en las prácticas en el aula. Investigadores como Schoenfeld (2016), Polya (1945), Mason, Burton y Stacey (2010) han propuesto fases o etapas y estrategias en la resolución de problemas, haciendo contribuciones significativas en este campo a la comunidad de educación matemática.

Los problemas que han dado origen a la caracterización del pensamiento variacional, generalmente estuvieron relacionados con el concepto de función, proporcionalidad, límites y derivadas. Se hizo énfasis en la solución, no se abordaron los procesos de resolución. En la mayoría de los casos, las caracterizaciones se han hecho desde la mirada y enfoque del investigador o profesor de matemáticas con experiencia reconocida y no desde los datos, que evidencian los resultados de los procesos mentales a los que debe recurrir el participante cuando resuelve problemas. A pesar de que los problemas resueltos fueron en dominios continuos, los resultados parecen mostrar que los partcipantes pensaron en forma discreta.

En contraste a los contextos donde ha sido caracterizado el pensamiento variacional, las ecuaciones lineales diofánticas de la forma $ax + by = c$, se caracterizan porque las constantes a,b y c son números enteros y las parejas de soluciones (x,y) a esta ecuación se encuentran en este mismo dominio. Por todo lo anterior, la investigación tuvo como propósito intentar dar respuesta a la pregunta científica: ¿Cómo es la naturaleza del pensamiento variacional emergente de la resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas de la forma $ax + by =$ c en profesores de matemáticas en formación?.

1.1. Revisión de la literatura

Patrick W. Thompson (1990, 2011), caracterizó la covariación en términos de conceptualizar los valores de cantidades como variables y luego conceptualizar dos o más cantidades cuando variaron simultáneamente. Sin embargo, para Thompson la cantidad no es igual a un número, definió cantidad como la conceptualización de un objeto por parte de alguien, con un atributo que puede ser medido (Saldanha y Thompson, 1998; Thompson y Carlson, 2017).

En este sentido la noción de covariación, es la de alguien que tiene en mente una imagen sostenida de los valores de dos cantidades (magnitudes) simultáneamente. Implica acoplar las dos cantidades, de modo que se forma un objeto multiplicativo de los dos. En la teoría del razonamiento cuantitativo de Thompson una persona razona covariacionalmente cuando prevé que los valores de dos cantidades varíen y que lo hagan simultáneamente (Thompson y Thompson, 1992, Abril; Carlson, 1998; Thompson, 2011; Thompson P., Carlson, Byerley y Hatfield, 2014; Thompson y Carlson, 2017). Su trabajo estuvo centrado inicialmente en conceptualizar situaciones en aritmética y luego en álgebra.

Confrey y Smith (1994, 1995) fundamentaron sus investigaciones en los temas de funciones exponenciales y razones de cambio en sus trabajos con estudiantes. Para Confrey y Smith estos significados conceptuales tienen sus raíces en la resolución de problemas de números racionales y los estudiantes experimentaron obstáculos conceptuales al identificar el todo cuando se multiplican fracciones. Precisaron y definieron los términos unidad multiplicativa, reiniciación, partes multiplicativas y razón.

En cuanto a la covariación como alternativa para crear y conceptualizar relaciones funcionales, los autores Confrey y Smith (1994, 1995) consideraron dos enfoques: un enfoque de correspondencia y un enfoque de covariación. Ellos afirman que en el currículo prevalece el enfoque de correspondencia con la notación funcional , al determinar un único valor de para algún valor de dado. Mientras, que el enfoque covariacional implica moverse operacionalmente de y_m a y_{m+1} coordinando con los movimientos de x_m a x_{m+1}.

Carlson y sus colegas (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, 2002) definieron razonamiento covariacional, como las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades variables, mientras se tienen en mente las formas y relación en que cambia cada una de ellas. Siguieron las ideas de Piaget (1970), en cuanto a que utilizaron la palabra desarrollo para significar que las imágenes de covariación pueden ser definidas por nivel, y los niveles emergen en un orden de sucesión. En sus trabajos describibireon cinco acciones mentales y cinco niveles de desarrollo asociados a estas acciones mentales cuando trabajaron con estudiantes universitarios.

Como resultado de sus trabajos Castillo-Garsow (2012, 2013) clasificaron dos formas diferentes de pensar sobre el cambio: a) pensar sobre el cambio en pedazos completos (pensamiento robusto). Por ejemplo, pensar en lo que ocurre totalmente en el intervalo de: una hora, luego en un minuto, luego en un segundo y así sucesivamente, y b) pensar en el cambio como un cambio en progreso (pensamiento suave).

Caballero y Cantoral (2013) en su trabajo con profesores presentaron una caracterización de lo que ellos denominaron pensamiento y lenguaje variacional y la forma en que se desarrolla. Describieron y caracterizaron el Pylvar mediante los siguientes elementos: a) situación variacional, b) argumentos variacionales, c) códigos variacionales, d) estructura variacional, e) estrategia variacional, f) comparación, g) seriación, i) predicción, j) estimación, k) tareas, l) tabulación, m) análisis de datos en tablas y n) análisis gráfico.

Smith (2008), Blanton y Kaput (2011) afirmaron que el pensamiento funcional es pensamiento representacional centrado en la relación entre dos (o más) cantidades variables. Establecieron seis categorías para caracterizar el pensamiento funcional: a) representar los datos como entrada-salida, b) representar gráficamente los datos, c) representar los datos como pares ordenados, d) encontrar relaciones funcionales, e) predecir estados desconocidos utilizando los datos conocidos, y f) identificar y describir patrones geométricos y numéricos. Todo lo anterior como resultado del trabajo con estudiantes de diferentes niveles educativos.

2. METODOLOGÍA

La pregunta científica acerca de ¿cómo es la naturaleza del pensamiento variacional?, conduce al propósito central de la investigación consistente caracterizar ¿qué es?, ¿cuáles son suspropiedades y dimensiones?, ¿cómo es?, y ¿cómo funciona? el pensamiento variacional desde el contexto propuesto. Por tanto, se optó por un enfoque cualitativo, con un diseño desde la teoría fundamentada. Es decir, construir una teoría a partir de los datos que posibilite dar respuesta a estos interrogantes. Siguiendo a Morse, Bowers, *et al.*(2009) la teoría fundamentada es un método para estudiar procesos y a la vez es en sí un proceso.

2.1. Teoría fundamentada

Los métodos de la teoría fundamentada surgieron de los sociólogos Barney G. Glaser y Anselm L. Strauss en los años 1965 y 1967, como resultado de su colaboración en estudios acerca de la muerte de pacientes en hospitales (Charmaz, 2014).

Según Charmaz (2006) para Glaser y Strauss los componentes que identifican y diferencian la práctica de la teoría fundamentada incluyen como mínimo: a) trabajo simultáneo en la reunión y el análisis de datos; b) construcción de códigos y categorías analíticas a partir de datos, no de hipótesis preconcebidas deducidas lógicamente; c) utilizar el método de comparación constante, que implica hacer comparaciones durante cada etapa del análisis; d) avanzar en el desarrollo de la teoría durante cada paso de la recopilación y análisis de datos; y e) el muestreo se dirige a la construcción de la teoría, no a la representatividad de una población.

Glasser y Strauss (1967, 1978) especifican tres tipos de codificación: a) *codificación abierta*, su objetivo es desarrollar una gran cantidad de códigos con los que se describen los datos; b) *codificación axial*, necesaria para investigar las relaciones entre conceptos y categorías que se han desarrollado en el proceso de codificación abierta; y c) *codificación selectiva*, con el propósito de integrar las categorías en una categoría central o núcleo de la teoría formal. A continuación, se describen algunos elementos que forman parte de la teoría fundamentada tomados de Corbin y Strauss (2008, 2017).

Categorías, conceptos de nivel superior bajo los cuales los analistas agrupan los conceptos de nivel inferior según propiedades compartidas. *Codificación*, extracción de conceptos a partir de datos brutos y desarrollo de los mismos en términos de sus propiedades y dimensiones. *Conceptos*, palabras que representan grupos o clases de objetos, eventos y acciones que comparten algunas propiedades comunes importantes, aunque las propiedades pueden variar dimensionalmente. *Propiedades*, características o componentes de un objeto, evento o acción; las características dan especificidad y definen un objeto, evento o acción. *Dimensiones*, variaciones dentro de las propiedades que dan especificidad y rango a los conceptos, y el *método de comparación constante*, como el proceso analítico de comparar diferentes piezas de datos por similitudes y diferencias.

Proceso, flujo de acción/interacción/emociones que ocurre en respuesta a eventos, situaciones o problemas. Un cambio en las condiciones estructurales puede requerir ajustes en las actividades, interacciones y respuestas emocionales. Las acciones/interacciones/emociones pueden ser estratégicas, rutinarias, aleatorias, novedosas, automáticas o reflexivas. El proceso tiene las propiedades: a) es de naturaleza variable, b) hay diferentes formas de conceptualizar el proceso, c) tiene una rutina acción-interacción, y d) el proceso puede desglosarse en subprocesos.

2.2. Diseño de la investigación

La teoría fundamentada es un proceso no lineal muy singular. Se requiere que el investigador circule permanentemente entre la recolección de datos, el análisis de datos, la codificación y el desarrollo de la teoría hasta alcanzar la saturación teórica. El esquema de la Figura 1, muestra el ciclo correspondiente al diseño de investigación como estrategia propuesta e implementada desde la teoría fundamentada. Se integraron y complementaron tres intervenciones que agruparon actividades didácticas con los participantes. Este ciclo estuvo permeado siempre por el método de comparación constante, que condujo al muestreo y saturación

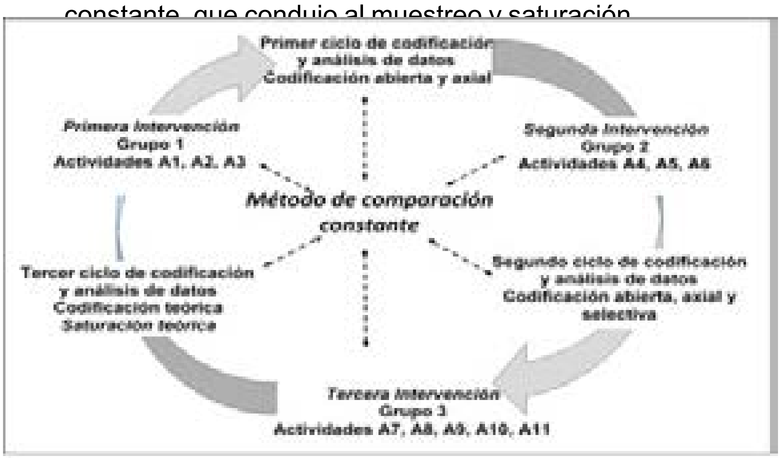


Figura 1. Diseño de investigación desde la Teoría Fundamendata
Fuente: Los autores

2.3. Los participantes

Un grupo de 24 estudiantes que tomaron un curso de Teoría de Números en el programa de Licenciatura que se forman para profesores de matemáticas en la Universidad Francisco de Paula Santander en la ciudad de Cúcuta durante el I semestre académico del año 2020 se constituyeron en los participantes. El 36% de ellos son mujeres, el 88% de las edades de los participantes oscilan entre 18 años y 23 años, uno de los estudiantes tiene edad de 31 años, mientras que hay uno con 24 años y otro con 25 años. Todos los participantes finalizaron su educación secundaria en colegios públicos de la región. El profesor que orienta el curso, ejerce a la vez el papel de profesor investigador.

2.4. Las fuentes de recolección de datos

Se diseñaron *11* actividades didácticas que involucran problemas relacionados con ecuaciones lineales diofánticas de la forma , como fuentes de datos. A medida que transcurría la investigación se corregían o mejoraban cuando fuese necesario. Como evidencia se tienen 197 documentos digitales en formato pdf realizados por los participantes en el desarrollo del curso.

Las actividades didácticas se caracterizaron por los siguientes elementos que conformaron su estructura: 1) *Encabezamiento*, conformado nombre institución, fecha, tiempo de la actividad, indicaciones, etc.; 2) *Presentación,* basada en temas específicos relacionados con la historia de la matemática y algunos matemáticos que trabajaron y dieron origen o aportaron en la fundamentación teórica de las temáticas respectivas; 3) *Desarrollo de la actividad*, se inicia siempre con el planteamiento al grupo de un problema para que cada participante lo resuelva individualmente o intente resolverlo con los conocimientos matemáticos a su disposición, las demás tareas en cada actividad se orientan siempre por una serie de cuestiones o preguntas con la intención de orientar a los participantes para que sean ellos mismos, quienes elaboren y construyan su conocimiento desde la variación y el cambio; y 4) *Evaluación,* conformada por una serie de problemas retadores.

2.5. El muestreo y saturación teórica

Glasser y Strauss (1967, 1978, 2017) hacen énfasis en que maximizar o minimizar la diferencia entre grupos hace posible controlar la relevancia téorica en la recolección de datos. Esto se relaciona directamente con las categorías. Por ejemplo, si en un grupo se recogen muchos más casos de una categoría, podrían detectarse diferencias que no se habían observado en la anterior recopilación de datos.

Para el muestreo teórico, saturación teórica, análisis de datos y ciclos de codificación, las actividades didácticas se organizaron en tres grupos: a) primer grupo, relacionadas con la resolución de problemas utilizando el método de la pendiente, b) la resolución de problemas utilizando la expansión por fracciones continuas, y c) acvidades compuestas por una serie de problemas retadores. Retadores en el sentido que exigen al resolutor ingenio, creatividad y nuevas estrategias desde la variación y el cambio para ser resueltos.

Para el muestreo teórico que funcionó paralelamente con los ciclos de análisis, codificación de datos y el método de comparación constante se propusieron cuatro fases: 1) *En la búsqueda de conceptos y categorías iniciales*, surgen allí los primeros incidentes y se inicia el primer ciclo de codificación; 2) *Aprender más sobre los datos y categorías iniciales*, se minimizan diferencias entre grupos, se rediseñan las actividades; 3) *Aumento de la teoría en profundidad*, esta fase se centra en maximizar diferencias entre grupos y a la vez entre categorías y subcategorías. El propósito en esta fase fué ir saturando la teoría; y 4) *Nuevas vías de muestreo,* tomar datos desde otras fuentes con la finalidad de completar datos no saturados en las fases anteriores. En esta última fase se presenta a los participantes problemas retadores que finalmente condujeron a la saturación teórica.

3. ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

3.1. El proceso de recolección, análisis y codificación de datos desde la teoría fundamentada

Ante la pregunta de investigación, la primera acción fue hacer claridad entre lo que son las operaciones del pensamiento variacional y el producto o resultado de estas operaciones (Burton, 1984). Con este propósito se especificaron dos elementos: a) el pensamiento variacional como operaciones sobre elementos, y b) los resultados o productos de las operaciones del pensamiento variacional. Los elementos son los problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas de la forma $ax + by = c$ y los resultados son las formas de solución dados a los problemas por los participantes y manifestadas en forma escrita.

Siguiendo el diseño desde la teoría fundamentada, se realizó un trabajo de ida y vuelta permanente sobre los datos. Por tanto, luego de realizada la primera intervención se inicia el proceso de análisis y codificación abierta, seleccionando los primeros incidentes. Incidentes en el sentido, que son los resultados o acciones evidenciadas por los participantes que descubrieron y construyeron mejores relaciones matemáticas desde la variación y el cambio, argumentando el porqué de ellas. Esto por supuesto, desde el punto de vista del profesor investigador. Desde otra lente y otro investigador, posiblemente los incidentes seleccionados pueden haber sido diferentes.

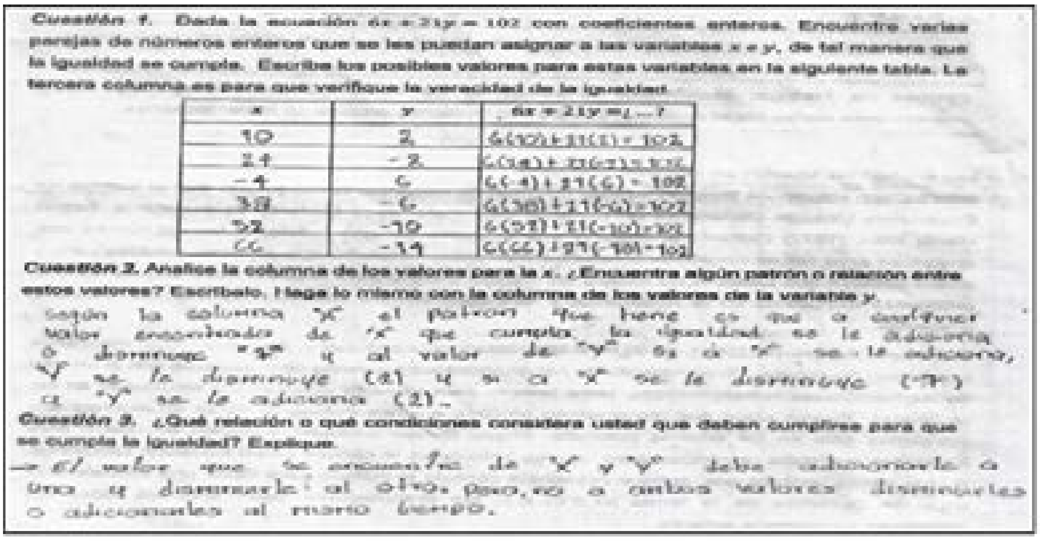
En el proceso de análisis y codificación abierta, se analizó detalladamente cada palabra, frase, signo, símbolo, fórmula, gráfica, etc., en las actividades correspondientes al primer grupo. Como resultado surgieron los primeros conceptos indicadores. Se denominan conceptos indicadores puesto que surgen y son indicadores de los datos, pero no son los datos en sí mismos. Se continuó con el proceso de recolección, análisis, codificación axial y selectiva; teniendo siempre en mente el muestreo teórico centrado en la búsqueda de propiedades y dimensiones de los conceptos (no como representantes de la población) que describan la naturaleza del pensamiento variacional desde los datos, que finalmente condujeron a la saturación teórica; entendida cuando nuevos datos no aportan nuevas propiedades y dimensiones a las categorías o conceptos ya construidos.

3.2. La puesta en marcha del diseño de investigación

El proceso de análisis y codificación se hizo sobre los resultados y acciones manifestadas por cada uno de los participantes, analizando actividad por actividad y no pregunta a pregunta; esto con el propósito de interpretar y dar sentido a los datos.

Primer ciclo de codificación y análisis. Se empezó el trabajo y proceso de codificación abierta con la selección de formas y estrategias de solución a las cuestiones propuestas en las actividades del primer grupo; codificadas como A1 MCD, A2 EDL I y A3 EDL II. El trabajo de los participantes E1, E6, E7, E10, E15, y E19 fue seleccionado y considerado como incidentes después de la primera intervención.

En la actividad A2 EDL I, se propone de entrada que los estudiantes resuelvan la ecuación lineal diofántica $6x + 21y = 102$ en números enteros. Se da un espacio de tiempo cercano a los cinco minutos para que resuelvan esta tarea. Como se esperaba, la mayoría de participantes empezaron a resolver la ecuación en el contexto de los números reales. Lo primera acción realizada fue despejar la variable , en este punto quedaron estancados gran parte de los estudiantes; puesto que se deben buscar soluciones en los números enteros. Por tanto, el profesor sugiere que trabajen sobre las Cuestiones 1,2y3 y . La intención de estas cuestiones es que a partir de casos particulares los estudiantes descubran, elaboren y expresen relaciones entre los números que hacen verdadera la ecuación. La Figura 2 muestra la respuesta del participante codificado como E10 A2 EDL I. La codificación significa: E10 estudiante 10, A2 actividad didáctica 2, y EDL I, el tema ecuaciones lineales diofánticas I.



Cuestión 1. Dada la ecuación $6x + 21y = 102$ con coeficientes enteros. Encuentre varias parejas de números enteros que se les puedan asignar a las variables x e y, de tal manera que la igualdad se cumpla. Escriba los posibles valores para estas variables en la siguiente tabla. La tercera columna es para que verifique la veracidad de la igualdad.

x	y	$6x + 21y = \_\_?$
10	2	6(10)+21(2) = 102
24	-2	6(24)+21(-2) = 102
-4	6	6(-4)+21(6) = 102
38	-6	6(38)+21(-6) = 102
52	-10	6(52)+21(-10) = 102
66	-14	6(66)+21(-14) = 102

Cuestión 2. Analice la columna de los valores para la x. ¿Encuentra algún patrón o relación entre estos valores? Escríbalo. Haga lo mismo con la columna de los valores de la variable y.

Según la columna "x" el patrón que tiene es que a cualquier valor encontrado de "x" que cumpla la igualdad se le adiciona o disminuye "14" y el valor de "y" si a "x" se le adiciona, "y" se le disminuye (4) y si a "x" se le disminuye (-14) a "y" se le adiciona (4).

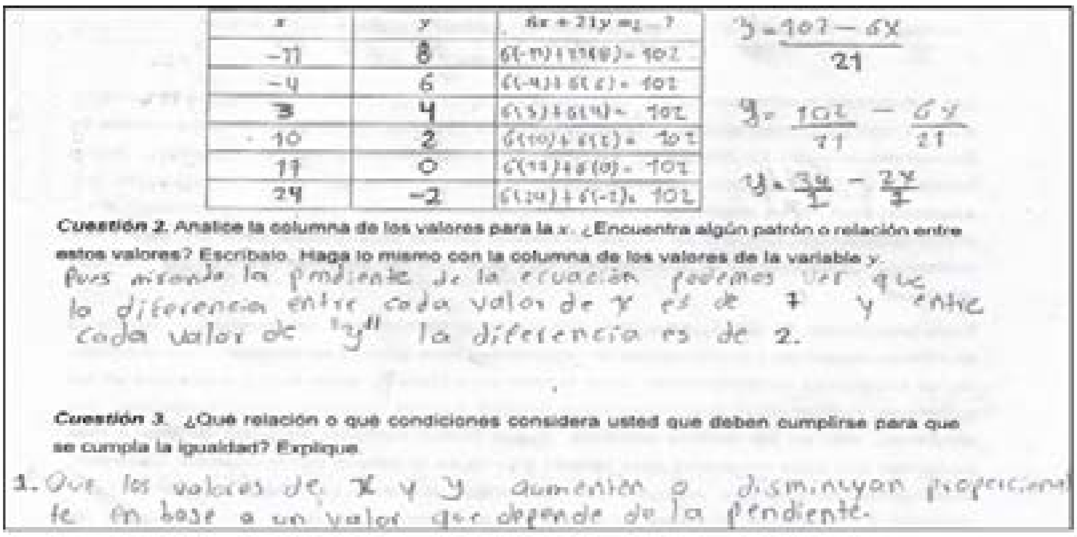
Cuestión 3. ¿Qué relación o qué condiciones considera usted que deben cumplirse para que se cumpla la igualdad? Explique.

→ El valor que se encuentre de "x" y "y" debe adicionarle a uno y disminuirle al otro, pero no a ambos valores disminuirles o adicionarles al mismo tiempo.

Figura 2. Resultados operaciones del pensamiento variacional participante E10 A2 EDL I
Fuente: Los Autores

Al igual que todos los participantes, el estudiante E10 luego de varios intentos, encuentra al menos seis parejas de números enteros que hacen verdadera la ecuación para responder la Cuestión 1. Como respuesta a la Cuestión 2, el paricipante conjetura acerca de relaciones que puede tomar independientemente cada una de las variables x e y . Mientras que en la respuesta a la Cuestión 3, establece una relación acerca de la forma como cambia cada una de las variables x e y, y cómo lo deben hacer al mismo tiempo.

Entre tanto las respuestas del participante codificado como E15 A2 EDL I se muestran en la Figura 3. El estudiante E15 realiza un proceso diferente, dando un tratamiento a la ecuación como función y utilizando a la vez manipulaciones algebraicos. Despeja la variable y , luego empieza a asignar valores a la variable x ; así obtiene el valor de la variable en función de x. Las expsresiones escritas acerca de las relaciones de los valores que pueden tomar las variables coinciden en parte con las de E10, pero E15 justifica sus afirmaciones a partir de la pendiente de la ecuación, debido a su forma de trabajo.



x	y	$6x + 21y = \_\_?$
-11	8	6(-11)+21(8) = 102
-4	6	6(-4)+21(6) = 102
3	4	6(3)+21(4) = 102
10	2	6(10)+21(2) = 102
17	0	6(17)+21(0) = 102
24	-2	6(24)+21(-2) = 102

$$y = \frac{102 - 6x}{21}$$

$$y = \frac{102}{21} - \frac{6x}{21}$$

$$y = \frac{34}{7} - \frac{2x}{7}$$

Cuestión 2. Analice la columna de los valores para la x. ¿Encuentra algún patrón o relación entre estos valores? Escríbalo. Haga lo mismo con la columna de los valores de la variable y.

Pues mirando la pendiente de la ecuación podemos ver que la diferencia entre cada valor de "x" es de 7 y entre cada valor de "y" la diferencia es de 2.

Cuestión 3. ¿Qué relación o qué condiciones considera usted que deben cumplirse para que se cumpla la igualdad? Explique.

1. Que los valores de X y Y aumenten o disminuyan proporcionalmente en base a un valor que depende de la pendiente.

Figura 3. Resultado operaciones del pensamiento variacional participante E15 A2 EDL I
Fuente. Los Autores

Las Figuras 2 y 3 muestran y coinciden con la mayoría de los participantes y evidencian las formas acerca de como sustituyen y combinan números enteros en las variables x e y . Hacen uso de su lenguaje natural para describir patrones y nexos que deben cumplir estos números (lo que varía) para ser una solución de la ecuación (nuevo estado: lo que cambia). Es una manera inicial de cómo los estudiantes interpretan estos nexos y surgen de allí los primeros códigos (categorías o conceptos indicadores) a los cuales se les denominan *sustitución variaconal y combinación variacional*.

Como resultado del análisis en el curso de la investigación se utilizan cuadros para mostrar las categorías que emergen de los datos. La Tabla 1, muestra la descripción, propiedad y dimensión del primer concepto indicador denominado sustitución variacional luego del análisis de las Cuestiones 1, 2 y 3 de la actividad A2 EDL I.

Cuadro 1. Código sustitución variacional

Código	Propiedad	Dimensión	Descripción
Sustitución variacional	Asignar números enteros a las variables x e y que hagan verdadera la ecuación	Tipos de números asignados	Reemplazar las variables x e y por números enteros positivos o negativos.
Lo que varía: Números enteros positivos o negativos signados			
Lo que cambia: Nueva solución particular a la ecuación.			

Fuente. Los Autores

Se inicia aquí el proceso de codificación axial, donde el investigador se aleja un poco de los datos originales para empezar a buscar diferencias, o similitudes de los códigos iniciales. Empiezan a surgir categorías de orden superior que absorben o engloban conceptos. Para el caso, surge la categoría transformación variacional como se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2. Categoría transformación variacional

Codificación abierta	***Codificación axial***		
Nombre código	*Nombre categoría*	*Propiedades*	*Dimensiones*
Sustitución variacional Combinación variacional	Transformación variacional	Sustituir, combinar parejas de números enteros.	Tipos de solución particular
Descripción: Tipos de soluciones como resultado de las operaciones del pensamiento de sustituir y combinar variacionalmente.			
Variable: Sustituir y combinar números enteros que cumplan las condiciones para las variables x e y.			
Cambio: Las diferentes soluciones particulares a la ecuación diofántica lineal.			
Contexto y condiciones de intervención: Actividad inicial presencial en el salón de clase y en línea después. Trabajo grupal e individual.			
Estrategia: Actividad didáctica A2. Tema: Ecuaciones Lineales Diofánticas I			
Objetivo de aprendizaje: Construir estrategias y procedimientos para hallar soluciones en números enteros a ecuaciones lineales diofánticas de la forma $ax + by = c$			

Estrategias de acción/interacción: Los estudiantes se proponen resolver problemas que involucran EDL utilizando diversas estrategias inductivas desde la variación y el cambio.
Consecuencias: cada estudiante puede generar diferentes estrategias para solucionar los problemas, así como diferentes formas de entender y de pensar el proceso.
Evidencia: Material impreso y digital.

Fuente. Los Autores

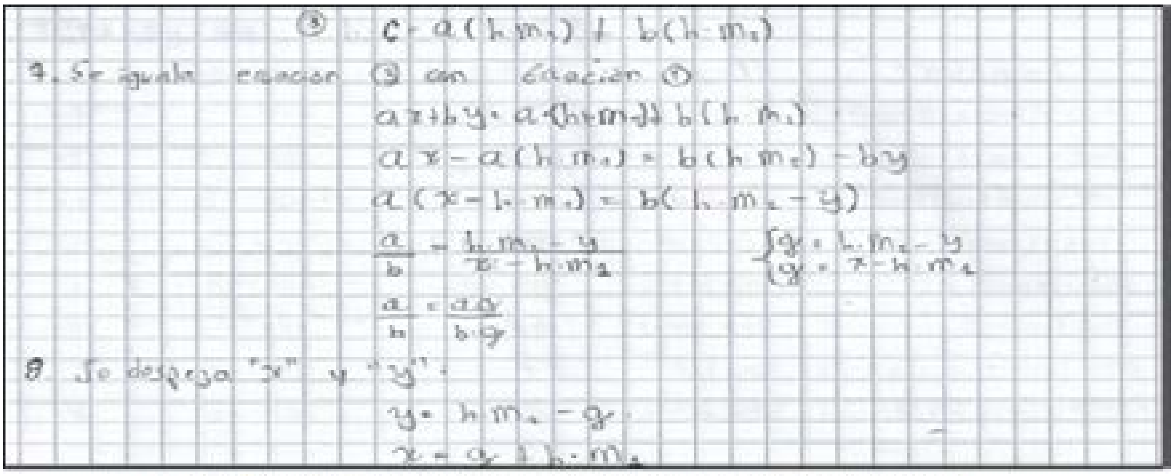
Las Tablas utilizadas para la codificación axial presentan cambios sustanciales respecto a las tablas de codificación abierta puesto que, para trabajar las relaciones entre las categorías, Corbin y Strauss (2017) sugieren examinar los datos y los códigos basados en un paradigma de codificación que se centra en, y relaciona las condiciones causales, el contexto, las condiciones de intervención, las estrategias de acción/interacción y las consecuencias.

Segundo ciclo de codificación y análisis de datos. El proceso de codificación y análisis continua. Un ejemplo, ante la pregunta: Escriba una serie de pasos o acciones para encontrar una solución particular mediante el Algoritmo de Euclides y luego hallar la solución general a la ecuación lineal diofántica de la forma w $ax + by = c$. Las Figuras 4 y 5 evidencian las acciones manifestadas por el estudiante E15.

La Figura 4, muestra las acciones del participante E15 cuando su pensamiento variacional opera sobre el problema: primero establece condiciones $(a > b)$, asigna letras y signos para crear expresiones algebraicas y representar el Algoritmo de Euclides como un proceso de divisiones sucesivas (representado por igualdades: $b = k_1\ (a)+t_{1,\dots,}t_{n-1} = k_n\ (t_{n-1}) + t_n$). El participante organiza y reorganiza su conocimiento especificando donde empieza, que condiciones deben cumplirse y cuando termina el proceso ($tn+1 = 0$).

De igual manera organiza otro subproceso donde utiliza los números enteros s y t que surgen de la representación del máximo común divisor de los números a y b como combinación lineal $(mcd\ (a,b)= as + bt)$ para hallar una solución particular que la formaliza como $x = h.m_1, y = h.m_2$. Previamente había hecho las asignaciones $h = c\ /\ (mcd(a,b)$ estableciendo la condición necesaria y suficiente de que el $mcd(a,b)$ debe dividir exactmente a c y así la ecuación $ax + by = c$ tenga solución en los números enteros.

Figura 4. Resultado operaciones del pensamiento variacional E15 A7 EDL FCI.
Fuente: Los Autores



③ $c = a(h\,m_1) + b(h\,m_2)$

7. Se iguala ecuacion ③ con ecuacion ①

$ax + by = a(h\,m_1) + b(h\,m_2)$

$ax - a(h\,m_1) = b(h\,m_2) - by$

$a(x - h\,m_1) = b(h\,m_2 - y)$

$\frac{a}{b} = \frac{h\,m_2 - y}{x - h\,m_1}$ $\quad \begin{cases} g = h\,m_2 - y \\ g = x - h\,m_1 \end{cases}$

$\frac{a}{b} = \frac{ag}{bg}$

8. Se despeja "x" y "y":

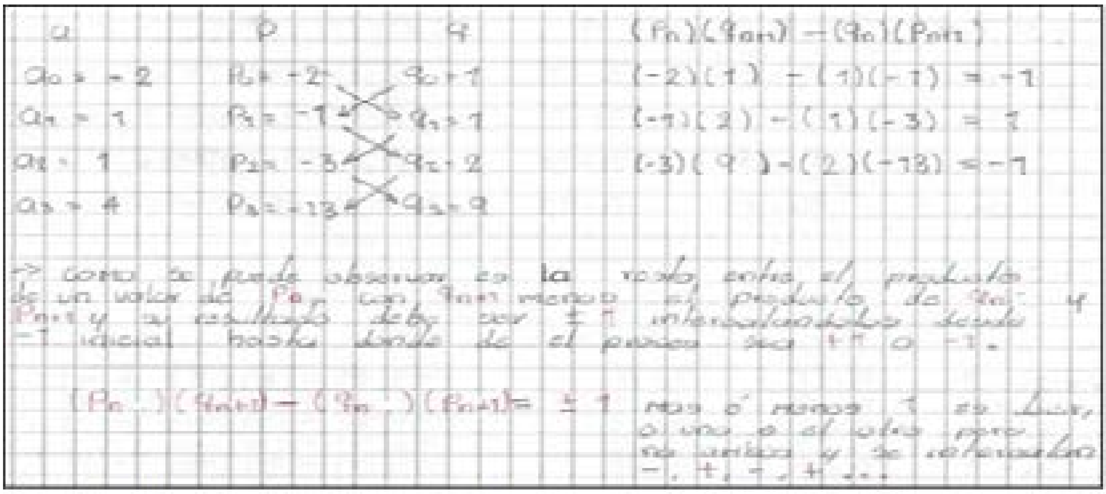
$y = h\,m_2 - g$

$x = g + h\,m_1$

Figura 5. Resultado operaciones del pensamiento variacional E15 A7 EDL FCI
Fuente: Los Autores

Las Figuras 4 y 5 evidencian la manera como el estudiante E15 continua su proceso asignando letras, símbolos, signos y expresiones algebraicas. De esta manera organiza y reorganiza su conocimiento, como un procedimiento para hallar la solución general a ecuaciones lienale diofánticas de la forma $ax + by = c$. Del proceso de análisis tanto del participante E15 como de sus compañeros surgen *las categorías asignar, formular, representar, organizar-reorganzar.*

La Figura 6, por su parte, muestra la forma como el participante E7, a partir de la expansión por fracciones continuas de la fracción racional p/q logra elaborar la fórmula $(pn)(q_{n+1}) - (q_n)(p_{n+1}) = \pm 1$ como estrategia para solucionar una ecuación lineal diofántica de la forma $px + qy = 1$ donde (p_n, q_n) es una solución particular a esta ecuación y luego hallar la solución general a la ecuación $px + qy = c$. Estas respuestas del participante aportan a las categorías de formalizar, generalizar y probar.



a	p	q	$(p_n)(q_{n+1}) - (q_n)(p_{n+1})$
$a_0 = -2$	$p_0 = -2$	$q_0 = 1$	$(-2)(1) - (1)(-1) = -1$
$a_1 = 1$	$p_1 = -1$	$q_1 = 1$	$(-1)(2) - (1)(-3) = 1$
$a_2 = 1$	$p_2 = -3$	$q_2 = 2$	$(-3)(9) - (2)(-13) = -1$
$a_3 = 4$	$p_3 = -13$	$q_3 = 9$	

Figura 6. Construcción de una fórmula desde la expansión por fracciones continuas
Fuente: Los Autores

Se aprecia como a partir del análisis desde la variación y el cambio el participante generaliza un procedimiento y construye una fórmula como estrategia para solucionar primero una ecuación de la forma $px + qy = \pm 1$ y luego solucionar la ecuación general $px + qy = c$.

Tercer ciclo de codificación, análisis de datos, muestreo y saturación teórica. El proceso de análisis, codificación axial y selectiva continúa y se construyen las siguientes categorías y subcategorías (Ver Cuadro 3) no sólo a partir de lo que muestran las Figuras 2, 3, 4, 5, 6 sino de los datos evidenciados por los demás participantes.

Cuadro 3. Categoría operaciones del pensamiento variacional sobre la resolución de problemas

Descripción: Operaciones del pensamiento variacional sobre problemas que involucran ecuaciones lineales diofántica de la forma $ax + by = c$		
Propiedades	Dimensiones	Descripción
Transformar		Sustituir y combinar números enteros que hagan verdadera la ecuación $ax + by = c$
	Sustituir	Tipos de números enteros asignados a las variables x *e* y que hagan verdadera la ecuación.
	Combinar	Tipos de condiciones sobre los números enteros a *y* b y las variables x *e* y para que la ecuación sea verdadera.
Formalizar		Niveles de formalizar el conocimiento para organizar y reorganizar las acciones/interacciones en la solución a problemas que involucran EDL de la forma $ax + by = c$.
	Asignar	Tipos de letras y símbolos asignados a las variables y constantes del problema dado.
	Formular	Tipos de fórmulas (expresiones algebraicas) asignadas para representar el conocimiento mediante letras, símbolos y signos.
	Verificar	Formas de comprobar que las soluciones halladas cumplan con la ecuación y el contexto del problema.
	Representar	Tipos de gráficos, tablas o descripciones verbales para mostrar la variación y cambio en las soluciones a la EDL
	Organizar-reorganizar	Niveles de acciones/interacciones a seguir para hallar solución a problemas que involucran EDL de la forma $ax +by = c$.
Generalizar	Representar	Tipos de expresiones algebraicas para representar nexos y relaciones derivadas de casos particulares
	Tipos de soluciones enteras	Tipos de condiciones sobre los números enteros a,b *y* c que permiten hallar fórmulas para determinar soluciones en un dominio específico.
Probar		Niveles de argumentos, razonamientos y explicación para convencer de la verdad del tipo de generalización
	Prueba empírica	Niveles de argumentos y/o secuencias de ejemplos particulares como esquema de prueba.
	Prueba causal	Tipos de argumentos, ejemplos y explicaciones a partir de los cuales se convence acerca de la verdad de las propiedades de la expansión en fracciones continuas de fracciones racionales y las fórmulas para generalizar tipos de soluciones.

Extender	Reformular condiciones	Tipos de variaciones sobre los números enteros a,b *y* c y las variables x x *e* y para que la ecuación tenga soluciones en el dominio específico de los números enteros
	Plantear problemas	Tipos de problemas del mundo real que involucren ecuaciones lineales diofánticas de la forma $ax + by = c$

Fuente. Los Autores

Finalmente, como resultado de las intervenciones y los ciclos de codificación y análisis de datos, surge el núcleo de la teoría o categoría central que se denominó el pensamiento variacional como proceso en la resolución de problemas. La Figura 7 presenta un esquema de este proceso y la densidad de relaciones de la categoría central.

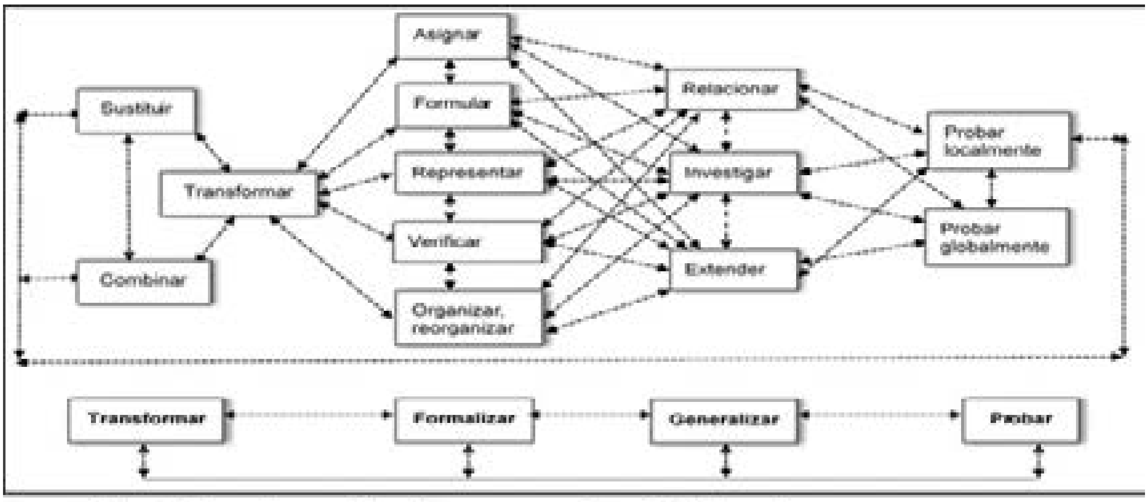


Figura 7: Pensamiento variacional como proceso en la resolución de problemas
Fuete: Los Autores

4. CONCLUSIONES

El diseño de investigación desde la teoría fundamentada posibilitó ir comparando y analizando constantemente los datos, transitando desde códigos o conceptos iniciales a categorías tentativas desde los datos. Mientras que, el método de comparación constante y los procesos parelelos de recolección de datos, la codificación abierta, axial y selectiva condujeron a una teoría formal como resultado del muestreo y saturación teórica.

Se elaboró y desarrolló el constructo *pensamiento variacional como proceso en la resolución de problemas* como núcleo o categoría central de la teoría formal para responder la pregunta de investigación. La categoría central como proceso la constituyen a su vez los subprocesos de transformación, formalización, generalización y prueba variacional. A continuación, se especifican las características de la teoría emergente de los datos como proceso, siguiendo a Corbin y Strauss (2017).

Naturaleza variable del proceso. El proceso es caracterizado por las acciones/interacciones entre las subcategorías transformar, formalizar, generalizar y probar variacionalmente. Es variable en el sentido de que cada categoría es el producto de operaciones del pensamiento variacional cuando opera sobre problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas de la forma $ax + by = c$, a la vez el resultado de una operación es el insumo para la(s) siguiente(s) categoría(s).

Además, cada subcategoría la conforman operaciones del pensamiento. Por ejemplo, la subcategoría transformar se caracteriza por las propiedades sustituir y combinar que, a su vez surgen como resultado de reemplazar y combinar números enteros que hagan verdadera la ecuación.

Allí lo que varía son las operaciones del pensamiento sustituir y combinar. Cada vez que se hace una sustitución y combinación apropiada, se obtiene una nueva solución de la ecuación. Cada pareja (x,y) de números enteros representa el cambio como resultado de la variación. Lo que varía son las operaciones de sustituir y combinar que a su vez transforman la dupla (x,y) en una nueva solución, como insumo o entrada para las siguientes operaciones del pensamiento.

Formas de conceptualizar el proceso. La categoría se esquematizó en términos de la evolución y desarrollo del pensamiento variacional en los participantes. Las actividades didácticas se diseñan y organizan con problemas que van desde contextos locales a problemas retadores en una variedad de contextos.

Al inicio de la investigación cerca del 80% de la totalidad de las actividades didácticas estaban diseñadas. Sin embargo, a medida que se implementa, cada actividad es evaluada. Como resultado de esa valoración cada una de las siguientes actividades se rediseñaron cuando fue necesario teniendo como referente el nivel de desempeño de los participantes, el proceso de codificación y el propósito de la investigación.

Aunque las operaciones de pensamiento variacional muestran la secuencia: transformar – formalizar – generalizar – probar, este esquema no es único. Esto se debe posiblemente a las formas en que cada participante interpreta, entiende y piensa los problemas y su forma de resolución.

Rutina acción-interacción. El proceso no es lineal, al contrario, cada estudiante al enfrentarse a un nuevo problema se ve obligado, por expresarlo así, a volver permanentemente sobre las acciones y estrategias de resolución anteriores. Los estudiantes adquirieron y desarrollaron la habilidad o destreza de pensar y trabajar primero casos particulares desde la variación para luego hallar soluciones generales al problema.

El proceso y los subprocesos. Cada subcategoría componente del proceso es en sí un proceso. Por ejemplo, la subcategoría formalizar es un proceso de asignar, formular, representar, verificar, organizar y reorganizar, cada uno de ellos desde la variación y el cambio. Ocurre lo mismo con las demás subcategorías. Lo mismo se puede afirmar acerca de los conceptos que conforman las subcategorías.

Finalmente, y como resultado de la investigación, el pensamiento variacional desde contexto se puede caracterizar como: un flujo permanente de acciones/interacciones interrelacionadas entre procesos y subprocesos de ida y vuelta cuando el pensamiento variacional opera sobre la resolución de problemas.

Una limitante, que a su vez se convierte en fortaleza de esta caracterización, radica en que los problemas en las actividades didácticas son problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas de la forma $ax + by = c$. Por tanto, el resultado de la caracterización del pensamiento variacional se hace cuando el participante resuelve problemas en contextos discretos, entiende y piensa las soluciones en contextos discretos.

Para los autores la teoría construida es sólo una de las muchas interpretaciones *plausibles* que pueden hacerse a partir de los datos y están de acuerdo con Rolfe (2006) cuando afirma que no cree que se puedan aplicar los mismos criterios de juicio a través de las metodologías cualitativas, porque cada metodología se basa en un fundamento teórico diferente y tiene procedimientos distintos.

La importancia de los aportes implica que se debe y se puede seguir avanzando en la caracterización del pensamiento variacional desde diferentes contextos a partir de la resolución de problemas que exijan al estudiante creatividad, intuición y nuevas formas de interpretar, entender y pensar variacionalmente sobre problemas; además de poner a prueba en otros escenarios la teoría construida.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Blanton , M., & Kaput, J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. En J. Cai , & E. Knuth (Edits.), *Early Algebraization. Advances in Mathematics Education.* Berlin,Heidelberg: Springer.

Burton, L. (1984). Mathematical Thinking: The Struggle for Meaning. *Journal for Research in Mathematics. Education, 15*(1), 35-49. doi:10.2307/748986

Caballero, M., & Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elmentos del pensamiento y lenguaje variacional. En R. Flores (Ed.), *Acta latinoamericana de Matemática Educativa* (págs. 1197-1205). México, DF: Comité Latinaoamaericano de Matemática Educativa.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education,*, 352-378. doi:10.2307/4149958

Castillo-Garsow, C. (2012). Continuous quantitative reasoning. En R. Mayes, R. Bonilla, L. Hatfield, & S. Belbase (Edits.), *Quantitative reasoning: Current state of understanding,* (Vol. 2, págs. 55-73). Laramie: University of Wyoming.

Castillo-Garsow, C., Johnson, H., & Moore, K. (2013). Chunky and smooth images of change. *For the Learning of Mathematics, 33*(3), 31-37.

Charmaz, K. (2006). *Constructing grounded theory: A practical guide through qualitative analysis.* London: Sage Publications.

Charmaz, K. (2014). *Constructing grounded theory* (2 ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Confrey, J. (1991). The concept of exponential functions: A student's perspective. En L. Steffe (Ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experience. Recent Research in Psychology* (págs. 124-159). New York, NY: Springer.

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 135-164. doi:https://doi.org/10.1007/BF01273661

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation and their role in the development of exponential function. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*, 66-86. doi:10.2307/749228

Corbin, J., & Strauss, A. (2008). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory.* Thousand Oaks, CA, USA: Sage Publications, Inc.

Corbin, J., & Strauss, A. (2017). *Conceptos básicos de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada* (4 ed.). Thousand Oaks, California, United States of America: SAGE Publications.

Glaser, B. (1978). *Theoretical sensitivity: Advances in the methodology of grounded theory.* Mill Valley, CA: Sociology Press.

Glaser, B., & Strauss, A. (2017). *Discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research.* New York, USA: Routledge.

Glasser, B., & Strauss, A. (1967). *The development of grounded theory.* Chicago: IL: Alden.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically* (2 ed.). Harlow, UK: Pearson Education Limited.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Recuperado el 30 de 05 de 2020, de http://cms.mineducacion.gov.co/static/cache/binaries/articles-340021_recurso_1.pdf?binary_rand=1223

Morse, J., Bowers, B., Stern, P., Corbin, J., Charmaz, K., & Clarke, A. (2009). *Developing Grounded Theory: The Second Generation.* New York: Routledge. doi:https://doi.org/10.4324/9781315430577

Piaget, J. (1970). Piaget's Theory. En P. Mussen (Ed.), *Carmichael's Manual of Child Psychology* (T. G. Gellerier & J. Langer, Trad., 3 ed., Vol. 1). New York: Wiley.

Polya, G. (1945). *Cómo plantear y resolver problemas. Editorial Trillas.* México: Editorial Trillas.

Rolfe, G. (2006). Validity, trustworthiness and rigour: quality and the idea of qualitative research. *Journal of advanced nursing, 53*(3), 304-310. doi:https://doi.org/10.1111/j.1365-2648.2006.03727.x

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of Education, 196*(2), 1- 38. doi:10.1177/002205741619600202

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. J. KAPUT (Ed.), *Algebra in the Early Grades* (págs. 133-160). New York, USA: Routledge Publishers.

Smith, E. (2017). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Edits.), *Algebra in the early grades* (págs. 155-182). Routledge.

Thompson, P. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. En L. Hatfield, S. Chamberlain, & S. Belbase (Edits.), *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education. WISDOMe Mongraphs* (Vol. 1, págs. 33-57). Laramie, WY: University of Wyoming.

Thompson, P. W., & Carlson, M. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. (J. Cai , Ed.) *Compendium for research in mathematics education*, 421-456.

Thompson, P., & Thompson, A. (1992, Abril). Images of rate. *Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association.* San Francisco. Recuperado el 17 de 06 de 2020, de http://pat-thompson.net/PDFversions/1992Images.pdf

Thompson, P., Carlson, M., Byerley, C., & Hatfield, N. (2014). Schemes for thinking with magnitudes: A hypothesis about foundational reasoning abilities in algebra 1, 2, 3. En L. Steffe, L. Hatfield, & K. Moore (Ed.), *Epistemic algebraic students: Emerging models of students' algebraic knowing*, *4*, págs. 1-24.

Vasco, C. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. *In Anais eletrônicos do CIAEM–Conferência Interamericana de Educação Matemática. 9*, págs. 2009-2010. Blumenau: Brasil.