

RECIBIDO EL 17 DE OCTUBRE DE 2016 - ACEPTADO EL 18 DE OCTUBRE DE 2016

# Estrategias de enseñanza de funciones recursivas en ciencias de la computación

**Mario Enrique Quintana**

*quintanamario\_for@ucp.edu.ar*

**Jorge Enrique Sagula**

*JorgeSagula@gmail.com*

**Florencio Isidro Monzón**

*cpisi22@hotmail.com*

*Universidad de la Cuenca del Plata, Sede*

*Formosa. Argentina*

*(0370) 4-455455 - / 4-458181*

## Resumen

Este trabajo contempla el análisis y el tratamiento de las estrategias de enseñanza abordando la Recursividad, modificando los enfoques tradicionales en el currículum de la Licenciatura en Sistemas de Información, dependiente de la Facultad de Ingeniería y Tecnología de la Universidad de la Cuenca del Plata, a fin de lograr mejorar el nivel de comprensión de la Recursividad y temas conexos, mostrando una fuerte convergencia entre la Matemática y las Ciencias de la Computación.

Esta propuesta es consecuencia del Proyecto de Investigación *“Enseñanza de las funciones recursivas como eje en las ciencias de la*

*computación”*.

Las estrategias de enseñanza referidas reflejan la consecuencia del diagnóstico sobre el nivel cognitivo en la temática abordada, de los alumnos de la carrera. En base a la evaluación se presentaron ejercicios y problemas a fin de resolverse mediante la recursión, tal que cada alumno demostrara su grado de comprensión, aplicando la recursividad considerando que la solución final depende de las soluciones de pequeñas instancias del mismo problema. Los resultados obtenidos como fruto del test diagnóstico, conforme a los procedimientos y a los resultados, fueron analizados cuantitativa y cualitativamente, y desde los mismos se propone un nuevo abordaje de la recursividad mediante diferentes estrategias de enseñanza y

en distintas instancias del currículo de la carrera. La aplicación de las estrategias de enseñanza fue consecuencia directa del desarrollo de dos seminarios-talleres, tal que en el primer seminario-taller el objetivo de las actividades planteadas fue instar al alumno a percibir la concepción abstracta y práctica de la recursividad, en tanto y en cuanto implicara procedimientos para resolver problemas relacionados con el perfil de la carrera que está cursando, mostrando su importancia “como eje en ciencias de la computación”; al efecto se presentaron situaciones reales, de modo que el alumno pudiera desenvolverse en su contexto e ideara el desarrollo de algoritmos recursivos y no recursivos -iterados-, familiarizándose con la recursividad, en general. A continuación, la propuesta incluyó la manipulación de objetos concretos, como las “Torres de Hanoi”, con el objeto que los alumnos se acercaran al pensamiento recursivo propiamente dicho, mejorando su aprendizaje. Además, se propusieron diversos ejercicios y situaciones de modo de conocer las bases del diseño de algoritmos recursivos y poder comprender su ejecución. Finalmente, se incluyó el trabajo cooperativo como estrategia significativa para la resolución de ejercicios, favoreciendo el logro de los objetivos propuestos; sin embargo, desde el punto de vista pedagógico, las actividades no resultaron suficientes en aras de consolidar el aprendizaje requerido, por tanto, fue imperioso introducir el conocimiento de los fundamentos del diseño de algoritmos recursivos; así, en el segundo seminario-taller, se propuso el uso de la lógica inductiva para formalizar los conceptos y la resolución de ejercicios y luego, se orientó el trabajo en búsqueda de la comprensión de las ventajas y desventajas de la recursividad y el desarrollo de métodos recursivos, permitiendo que el alumno comprenda que la recursividad sólo debe utilizarse cuando realmente es necesaria y también, puede utilizarse como técnica para simplificar o dividir un problema en problemas de menor tamaño del mismo tipo.

Los resultados obtenidos durante todo el proceso de implementación de las distintas estrategias fueron más que significativos para el logro de los objetivos propuestos en la investigación. Esto nos impulsa a creer que es necesario abordar estas estrategias, entre otras a explorar, en las distintas asignaturas de la carrera.

**Palabras clave:** Recursividad. Estrategias de Enseñanza. Diseño de Algoritmos Recursivos. Matemática. Ciencias de la Computación.

### **Abstract**

This work includes the analysis and treatment of teaching strategies addressing Recursion modifying traditional approaches in the curriculum of the Bachelor of Information Systems, under the Faculty of Engineering and Technology of the University of Cuenca del Plata order to achieve improve the level of understanding of recursion and related topics, showing strong convergence of Mathematics and Computer Science.

This proposal is the result of the research project “Teaching recursive functions as an axis in computer science”.

Teaching strategies referred to reflect the result of the diagnosis on the cognitive level on the topics addressed, students of the race. Based on the evaluation exercises and problems to be solved by recursion occurred, so that each student will demonstrate their understanding, applying recursion considering that the final solution depends on the solutions of small instances of the same problem. The results obtained as a result of the diagnostic test, according to the procedures and the results were analyzed quantitatively and qualitatively, and from them a new approach to recursion proposed by different teaching strategies and different instances of the curriculum of the race.

The implementation of teaching strategies was a direct result of the development of two seminar-

workshops, such that in the first seminar-workshop the objective of the proposed activities was to urge the student to perceive the abstract conception and practice of recursion, so long as implied procedures for solving problems related to the career profile he is studying, showing its importance “as axis computer science”; to effect real situations, so that the student could function in their context and devise development of recursive algorithms and not recursive -iterated-familiarizing themselves with recursion. Next, the proposal included the manipulation of concrete objects, such as the “Towers of Hanoi”, in order that students approaching the recursive thought itself, improving their learning. In addition, various exercises and situations so you learn the basics of design recursive algorithms and to understand its implementation were proposed. Finally, cooperative work was included as a significant strategy for solving exercises, promoting the achievement of the objectives; however, from the educational point of view, the activities were not sufficient in order to consolidate the learning required, therefore it was imperative to introduce the knowledge of the fundamentals of design recursive algorithms; Thus, in the second seminar-workshop, using inductive logic was proposed to formalize the concepts and solving exercises and then work in search for understanding of the advantages and disadvantages of recursion and development was oriented recursive methods, allowing students understand that recursion should only be used when really necessary and can be used as a technique to simplify or break a problem into smaller problems of the same type.

The results obtained during the process of implementing various strategies were more significant for the achievement of the objectives proposed in the investigation. This leads us to believe that these strategies need to be addressed, among others to explore, in the different subjects of the race.

**Keywords:** Recursion. Teaching Strategies. Recursive algorithms design. Math. Computer’s science.

## 1. Introducción

En este trabajo se advierte la importancia de cómo se enseña y qué metodologías resultan más adecuadas para “la enseñanza de la recursividad en Ciencias de la Computación”, con énfasis en la Licenciatura en Sistemas de Información de la Universidad de la Cuenca del Plata.

Es importante destacar que la enseñanza de las ciencias de la computación ha tenido un gran avance y cambios acelerados en estos últimos tiempos. Es tal que los requerimientos actuales han promovido innumerables conocimientos matemáticos, y didáctico-matemáticos, de forma de ser reflejados en los distintos métodos de enseñanza implementados desde la disciplina misma de la matemática y asignaturas afines, pero que no han sido suficientes para dejar asentada la importancia de la recursividad para las restantes asignaturas del Plan de Estudios de la Licenciatura en Sistemas de Información. Considerando que esta demanda proviene, entre otras, de la Teoría de la Computación, se ha despertado el interés en los profesores del área Matemática, y de esta forma ampliar los métodos de enseñanza para abordar este contenido.

En general, en la actualidad, en la asignatura Álgebra y Lógica Computacional, eje en la formación básica del profesional, la Recursividad no se desarrolla como un concepto central, y en la asignatura Matemática Discreta el tratamiento de la Recursividad es mínimo, en tanto que en Análisis Matemático, la competencia y propiedad es prácticamente poco relevante. Consecuentemente, un contenido de la importancia de la Recursividad en la Licenciatura en Sistemas de Información no se aborda en las

disciplinas centrales del plan de estudios desde el enfoque matemático y didáctico-matemático, específicamente.

Las actividades que se desarrollan en esta investigación se orientan directamente a las metodologías y estrategias de enseñanza implementadas con el propósito que cada alumno de la Licenciatura en Sistemas de Información desarrolle las habilidades recursivas con el objeto de aplicarlas en las asignaturas: Álgebra y Lógica Computacional, Matemática Discreta, Teoría de la Computación, Base de Datos I y Programación I; y análogamente sea posible aplicar los conceptos fundamentales de recursividad y los procedimientos recursivos, en la enseñanza de ciencias de la computación, a fin que de enriquecer su formación, mejorando su perspectiva e integración.

## 2. Marco Teórico

Existen antecedentes y experiencias sobre diferentes metodologías de enseñanza de la Recursividad en las Ciencias de la Computación, en esta permanente búsqueda de la metodología para poder enriquecer la enseñanza y mejorar la comprensión de la recursividad; por tanto, se advierte que estas técnicas permitieron argumentar la imbricada fusión de la temática como eje para mejorar la interdisciplinariedad entre las Ciencias Matemáticas y las Ciencias de la Computación.

La autora Guevara Mora [8] utiliza la técnica didáctica ABP, planteando conclusiones sobre los resultados obtenidos al aplicar la técnica en la enseñanza de la recursividad, detallando además una guía de desarrollo del tema aplicando la técnica y una guía de evaluación. En este sentido, también Rueda y Castro [13] presentan cómo se introduce el concepto de Recursividad en la cátedra de Informática del Departamento de Ciencias de la Computación de la Universidad Nacional del Sur, indicando que

en las asignaturas iniciales de programación, la recursividad es uno de los temas de mayor complejidad; esta complejidad no reside en el uso de la computadora, y tampoco en las facilidades provistas por los lenguajes de programación para soportar procedimientos recursivos que resulten difíciles de entender sino que la dificultad consiste en “plantear” soluciones recursivas. Indican, además, que la recursividad constituye una forma diferente de pensar y razonar en ciertos problemas.

Chesñear, Maguitman y González [5] en su trabajo “Tecnología informática en un curso de lenguajes formales y teoría de autómatas: un enfoque constructivista”, aplican la teoría de lenguajes recursivos, expresando que inicialmente no parecía despertar un adecuado interés en el alumnado, obteniendo generadores de discusiones e intercambios de ideas, en la Universidad Nacional del Sur. En la misma universidad, Chesñear [6] propone algunas consideraciones y ejercicios motivadores para la enseñanza de la recursión, concluyendo que “La recursión es uno de los temas que mayor fascinación ejerce sobre los estudiantes que adquieren sus primeras vivencias en programación a nivel universitario y, a la vez, evidencia a la recursión como herramienta de la programación”.

Di Mare [7], investigador costarricense en la Escuela de Ciencias de la Computación e Informática de la Universidad de Costa Rica, presenta tres ejemplos sencillos de programas que ayudan, al alumno programador, a entender rápidamente el significado de la recursividad y cómo funciona, tal que cada enfoque reviste mayor complejidad que el anterior. El primero consiste en una aplicación muy simple de recursividad para crear un comando para el sistema operativo DOS/pc; el segundo corresponde al cálculo del factorial escrito en Pascal, y el último es el clásico recorrido PID (Proceso-Izquierda-Derecha) para árboles.

Cada ejemplo ilustra un componente diferente del concepto de recursión.

En la búsqueda de estrategias de enseñanza que aporten a la mejor comprensión de la temática, Rubio Sánchez [12], docente del Departamento de Lenguajes y Sistemas informáticos de la Universidad del Rey Juan Carlos, propone la Enseñanza de la Recursividad mediante Problemas Combinatorios Equivalentes. En esta experiencia, presenta a la recursividad como concepto básico de programación, que juega un papel importante en la adquisición de competencias asociativas a la abstracción funcional y descomposición de problemas mediante el concepto de inducción. Se aportan varias clases de problemas combinatorios, que comparten la misma solución analítica, con el propósito de enseñar variantes.

Otra experiencia en esta dirección es el uso de Mínimos Cuadrados Recursivos, en el trabajo realizado por Arrufat [1] en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de la Plata, presentando un análisis comparativo de los mínimos cuadrados ordinarios (MCO) y los mínimos cuadrados recursivos (MCR), prestando particular atención a las propiedades de los residuos obtenidas por ambos métodos, concluyendo que el método MCR constituye una técnica valiosa para realizar docimasia de hipótesis en el contexto del modelo lineal general con repesores fijos en muestras repetidas. Se destaca la gran simplificación conceptual que puede lograrse mediante este enfoque.

Lacave, Molina y Giralt [9], docentes-investigadores de la Universidad de Castilla en la experiencia "Identificando algunas causas del fracaso en el aprendizaje de la recursividad: Análisis experimental en las asignaturas de programación" demuestran que la recursividad es una herramienta muy poderosa para resolver problemas complejos, sin embargo se trata de uno de los conceptos más difíciles de entender para los alumnos que están aprendiendo

a programar. Los autores describen una experiencia desarrollada en las asignaturas de Fundamentos de Programación I y Metodología de la Programación en la Escuela Superior de Informática en Ciudad Real, cuyo objetivo era identificar las necesidades del alumnado al enfrentarse a la asimilación del concepto de recursividad.

### 3. Hipótesis

Nuestra visión se orienta a afirmar que la Recursividad y sus temas conexos son fundamentales en la formación del futuro profesional en distintas carreras de Ciencias de la Computación, por tal razón, su enseñanza mediante distintas estrategias a fin de desarrollar habilidades recursivas en los alumnos con el propósito de aplicarlas en las asignaturas Álgebra y Lógica Computacional, Matemática Discreta, Teoría de la Computación, Base de Datos I y Programación I es más que significativa, en aras de mejorar la formación del futuro egresado, mejorando su perspectiva e integración.

Bajo esta hipótesis, suponemos que la aplicación innovadora, motivadora y variada de estrategias de enseñanza posibilitará que los resultados logrados durante todo el proceso de ejecución de las distintas estrategias serán más que satisfactorios para alcanzar los objetivos propuestos en la investigación.

### 4. Metodología

#### 4.1. Un diagnóstico previo

Al iniciar el trabajo de campo, se procedió a elaborar un diagnóstico escrito sobre la realidad, realizando una encuesta a los docentes responsables de las asignaturas mencionadas anteriormente, dándoseles un cuestionario sobre la enseñanza y las estrategias implementadas para desarrollar la temática.

Esta encuesta fue dirigida a los docentes dictantes de asignaturas afines a la temática que de alguna forma abordan el concepto

de recursividad en su proyecto curricular, en términos de la importancia de su enseñanza.

La organización y la presentación de los resultados provenientes de la instancia anterior se efectuarán mediante Estadística Descriptiva, de modo de facilitar la elaboración de conclusiones sobre la temática y su enseñanza.

Como parte del Diseño de la Investigación se planteó la exploración de estrategias de enseñanza basadas en el aprendizaje de la recursividad. La investigación y exploración de algunas estrategias ya implementadas permitirá no sólo conocer las ventajas y desventajas de la recursividad sino también su importancia en las ciencias de la computación, en general.

#### 4.2. Resultados obtenidos

En el mismo diagnóstico se observó que la mayoría de los docentes superan los cuarenta años, dos de ellos no tienen más de diez años de antigüedad en la docencia y le dedican seis horas semanales al dictado de la asignatura y de alguna forma afirman que abordan la Recursividad. Todos tienen algún posgrado o se encuentran cursando. Y dos de ellos son profesores de Matemática.

Algunos docentes están parcialmente de acuerdo que la naturaleza particular de la recursividad como algoritmo es diferente a cualquier otro algoritmo tradicional que se enseña; consecuentemente, la metodología usual para otros temas de la asignatura no es útil para enseñar recursividad. Consideran que la riqueza eminentemente práctica de la recursividad en el “mundo de la computación” hace que este tema deba tener mayor importancia mayor en el currículo de la Licenciatura en Sistemas de Información.

Los docentes restantes están de acuerdo o muy de acuerdo.

Muy pocos docentes opinan que se sienten más inseguros abordando recursividad en forma

tradicional que cualquier otro contenido de su asignatura. Todos están de acuerdo que las características propias de la recursividad en otras áreas cognitivas ajenas a la matemática hablan por sí solas de la importancia de estos contenidos en el currículo de la carrera.

Es necesario tener presente que no todos los docentes han abordado la recursividad en el desarrollo de su asignatura, sobre todo en aquellas asignaturas que dictan regularmente. En cambio, el docente responsable de la asignatura Programación afirma haber abordado esta temática.

En cuanto a las estrategias de enseñanza, la temática es abordada mediante el uso de algoritmos para la resolución de situaciones y ejercicios. La bibliografía empleada para la temática no es específica, la mayoría se refiere a la programación como: “Algoritmo y Programación en Pascal” de Flores, Ojeda y otros.

Con respecto a los recursos didácticos sólo se utiliza la pizarra, por tanto, resulta una recursividad abstracta y, no concreta u objetiva. En programación, también emplean los lenguajes: Pascal, C, C++, entre otros.

Al abordar el tema desde diferentes estrategias los docentes afirman que las dificultades más frecuentes residen en la comprensión del concepto.

Es importante considerar que la mayoría de los docentes opinan que la recursividad es válida en cualquier disciplina, pues los procesos recursivos se observan en la naturaleza y en la ciencia misma. Además, aseguran la importancia de la temática debido al impacto en el estudio de los paradigmas de la programación; y lo imprescindible del tema como base y conocimiento previo para las asignaturas más importantes de la carrera.

En conclusión, se puede decir que consideran de gran utilidad e importancia la recursividad en la estructuración del plan de estudios y en la articulación de las asignaturas de la carrera.

## 5. Diseño e implementación de estrategias de enseñanza

Ante el análisis y los resultados obtenidos fue necesario diseñar e implementar propuestas de enseñanza basadas en la recursividad incorporando estrategias de enseñanza sustentadas en situaciones donde se utiliza la recursividad. Al efecto, se propusieron dos seminarios-talleres a fin de abordar e implementar nuevas estrategias de enseñanza. Posteriormente, se efectuó un Test Evaluativo, con el propósito de evaluar dicho abordaje.

### 5.1. Primer Seminario-Taller

En esta primera actividad, desarrollada el día 25/09/15, el objetivo fue promover en los alumnos la visualización, la concepción abstracta y la práctica de la recursividad, en tanto y en cuanto impliquen procedimientos para resolución de situaciones contextuales relacionadas al perfil de la carrera. Durante el desarrollo del seminario-taller se reforzaron los conceptos recursivos detectados en carácter de insuficientes en la recopilación de encuestas; y además, se abordaron los algoritmos y procedimientos recursivos para fortalecer el trabajo de los alumnos de forma de aplicarlos en las distintas asignaturas de la carrera.

Las actividades se iniciaron con problemas y ejercicios relacionados con inducción completa, de manera que el alumno lograra comprender que una determinada afirmación es verdadera para algunos casos particulares, y luego comprobara lógicamente que tal afirmación sigue siendo verdadera para los casos generales. Como actividad principal, para introducir al algoritmo propio de la recursión, se trabajó sobre la base de las Torres de Hanoi.

Algunos de los problemas propuestos se resolvieron mediante la búsqueda de otros problemas isomórficos para los cuales se conoce su solución. Tanto el seguimiento de los procedimientos como las soluciones recursivas no fueron difíciles. Además, en esta etapa se consideraron los problemas más sencillos y más prácticos; demostrando a los alumnos paso a paso su desarrollo, y enfatizando en las cuestiones donde se detectaron dificultades para su comprensión. La complejidad de las situaciones presentadas fue en forma creciente.

Es importante aclarar la importancia y la motivación lograda con el juego de las Torres de Hanoi (Figura 1), pues los alumnos se desarrollaron en buena forma, resultándoles factible la manipulación del material didáctico y el desarrollo de las consignas, sin embargo no pudieron esbozar cada uno de los planteos y procedimientos recursivos.



Figura 1. Utilización de las Torres de Hanoi

### 5.2. Segundo Seminario-Taller

La segunda actividad se realizó el día 23/10/15, prosiguiendo las estrategias de enseñanza a partir de los logros obtenidos en el **Primer Seminario-Taller**, llevando a la práctica los conceptos brindados inicialmente, afianzando de tal forma los conceptos sobre recursividad. Con el propósito de ampliar las técnicas de abordaje de enseñanza de la recursividad se procedió a invitar a los docentes que actualmente dictan las

asignaturas de Álgebra y Lógica Computacional, y de Matemática Discreta a efectos que desarrollen un contenido desde su propuesta (Figura 2).

Posteriormente, se trabajó en resolución de situaciones contextuales, utilizando como eje la recursividad en problemas relacionados con el perfil de la carrera y su importancia en otras asignaturas. La metodología aplicada se sustentó en el uso de la lógica inductiva profundizando los conceptos, la definición de situaciones reales para resolver problemas mediante recursividad y el trabajo cooperativo en el aprendizaje.



Figura 2. Segundo Seminario-Taller

### 5.3. Test Evaluativo

Al finalizar el segundo seminario se realizó un **Test Evaluativo**. El objetivo específico de este instrumento consistió en evaluar el avance en la investigación y las metas propuestas, y además, medir y comparar de alguna forma -cuantitativa o cualitativa- el estado inicial de los conocimientos referidos a la temática como así también los avances alcanzados al desarrollar las actividades (Figura 3).

El uso de este instrumento de evaluación permitió medir los efectos en la implementación de las estrategias abordadas en los talleres. Así, se pudo valorar tanto cuantitativa como cualitativamente los procesos y los procedimientos empleados para resolver problemas en situaciones afines a la temática central, desde donde también fueron evaluados los resultados de las estrategias de enseñanza aplicadas.

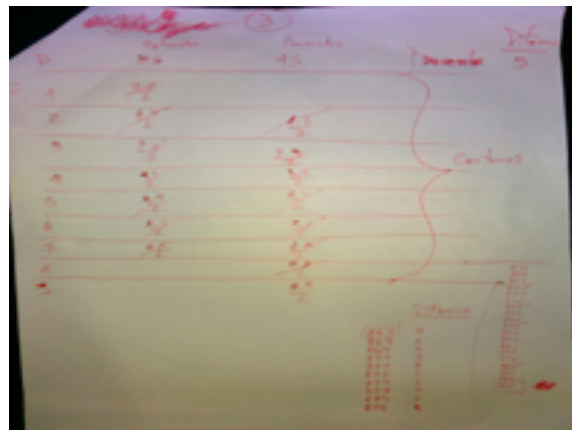


Figura 3. Resolución mediante Recursividad.

## 6. Análisis y Conclusiones

Durante el proceso de aplicación de las metodologías propuestas para la enseñanza de la recursividad se ha podido remarcar la concentración, la capacidad, la predisposición y el esmero de los alumnos, actitudes dignas de consideración para trabajar en esta temática.

Aplicando las distintas estrategias se destacaron aspectos significativos en el trabajo de los alumnos, como:

- *Motivación*
- *Creatividad*
- *Originalidad*
- *Comprensión*



## 7. Referencias Bibliográficas

1. Arrufat, J. L. (1990). *Mínimos Cuadrados Recursivos*. Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de la Plata. La Plata.
2. Barallo Calonge, Javier (1993). *Geometría Fractal, Algorítmica y representación*. Anaya Multimedia.
3. Bogart, K. (1996). *Matemática Discreta*. Limusa S. A., México.
4. Bogart, K. P. (2004). "Discrete Math for Computer Science Students". Scott Drysdale & Cliff Stein.
5. Chesñevar, A. G., Maguitman, M. P. & González, M. L. (2003). *Tecnología Informática en un curso de lenguajes formales y teorías de autómatas: un enfoque constructivista*. Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca.
6. Chesñevar, C. I. (1994). Algunas consideraciones y ejercicios motivadores para la enseñanza de la recursión. // *Ateneo de profesores universitarios de computación* (Pp. 43-54). Universidad Nacional del Sur-Departamento Matemática. Bahía Blanca.
7. Di Mare, A. (1996). Tres formas diferentes de explicar la recursividad. *Revista Ingeniería*, Pp. 31-44.
8. Guevara Mora, G. (2010). *Revista Intersede-Universidad de Costa Rica*, Vol. XI N° 20.
9. Lacave, C., Milina, I. A. & Giralt, J. (2013). Identificando algunas causas del fracaso en el aprendizaje de la recursividad. *Jornadas de Enseñanza Universitaria de la Informática* (Pp. 225-232). Ciudad Real: Universitat Jaume I. Escola superior de tecnologia i Ciències Experimentals.
10. Riera Bisbal, Jesús (2009). Manual de algorítmica: recursividad, complejidad y diseño de algoritmos. Editorial UOC, S.L. 1ª ed., 1ª impresión (12/2009).
11. Rodríguez Herrera, Daniel (29-07-2009). «¿Qué es la recursividad? ¿Qué es la recursividad? ¿Qué es la recursividad?...». Libertad Digital. Consultado el día 20-01-2013.
12. Rubio Sanchez, M. (2011). Enseñanza de la recursividad mediante problemas combinatorios. // *Seminario de Investigación en tecnologías de la Información aplicadas a la Educación* (Pp. 41-54). Biblioteca de Educación del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Madrid.
13. Rueda, S. (2013). Recursividad Esencial en la Resolución de Problemas. // *Congreso Argentino de Ciencias de la Computación*. Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca.