

OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE LIBROS DE TEXTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

EPISTEMOLOGICAL OBSTACLES IN TEXTBOOK PROBLEM SOLVING OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Teovaldo García Romero¹

Esneider Arcia Oliveros²

Daniel Meza Payares³

Jaider Pertuz Rincón⁴

UPC

1 teovaldogarcia@unicesar.edu.co. Investigador Universidad Popular del Cesar, docente Universidad Popular del Cesar, categoría Titular, investigador Senior, líder grupo de investigación interdisciplinario pensamiento numérico, políticas públicas de ciencia, tecnología e innovación, medio ambiente, problemas de la educación Latinoamericana y del Caribe, categoría A, según Minciencias. Orcid Id <https://orcid.org/0000-0002-6398-5113>

2 earcia@unicesar.edu.co. Investigador del grupo de investigación interdisciplinario pensamiento numérico, políticas públicas de ciencia, tecnología e innovación, medio ambiente, problemas de la educación Latinoamericana y del Caribe, categoría A, según Min ciencias. Estudiante de Licenciatura en matemáticas y Física, VIII- semestre, Universidad Popular del Cesar. Orcid Id <https://orcid.org/0000-0002-6085-0424>

3 danielmeza@unicesar.edu.co. Investigador Universidad Popular del Cesar, docente Universidad Popular del Cesar, categoría Asociado, Magíster en Matemáticas Aplicadas, pertenezco al grupo de investigación interdisciplinario pensamiento numérico, políticas públicas de ciencia, tecnología e innovación, medio ambiente, problemas de la educación Latinoamericana y del Caribe, categoría A, según Min ciencias. Orcid Id <https://orcid.org/0000-0001-7153-3531>

jenriquepertuz@unicesar.edu.co. Investigador del grupo de investigación interdisciplinario pensamiento numérico, políticas públicas de ciencia, tecnología e innovación, medio ambiente, problemas de la educación Latinoamericana y del Caribe, categoría A, según Min ciencias. Estudiante de Licenciatura en matemáticas y Física, VIII- semestre, Universidad Popular del Cesar. Orcid Id <https://orcid.org/0000-0002-9970-6200>

4 jenriquepertuz@unicesar.edu.co. Investigador del grupo de investigación interdisciplinario pensamiento numérico, políticas públicas de ciencia, tecnología e innovación, medio ambiente, problemas de la educación Latinoamericana y del Caribe, categoría A, según Min ciencias. Estudiante de Licenciatura en matemáticas y Física, VIII- semestre, Universidad Popular del Cesar. Orcid Id <https://orcid.org/0000-0002-9970-6200>

RESUMEN

En el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), en los programas de Licenciatura en Matemáticas y Física, e Ingeniería de las Facultades de Educación y Ciencias Básicas y de Ingeniería y Tecnologías, de la Universidad Popular del Cesar, existen obstáculos epistemológicos y didácticos en la resolución de problemas de libros de textos de ecuaciones diferenciales ordinarias en los estudiantes y docentes de aula; específicamente, en la aplicación del conocimiento de las secuencias del saber matemático escolar, trabajado en el aula de clases de ecuaciones diferenciales ordinarias. En consecuencia, el objetivo de esta investigación fue analizar los obstáculos epistemológicos en la resolución de problemas de libros de texto de EDO. Encontrándose, que existen dificultades en los estudiantes en la resolución de problemas de EDO; por lo cual, estos parecen estar relacionadas no solo por la falta de conocimientos de las secuencias del saber matemático del cálculo diferencial e integral; sino que también, en el plano epistémico y didáctico, la hegemonía de lo algebraico en el desarrollo histórico de la teoría del saber matemático escolar, ha permitido que el estudiante, lo haya convertido en un simple hecho algorítmico, sin tener en cuenta los análisis epistemológico, ontogenético y didáctico; por ende, son constitutivos de la enseñanza basada en algoritmos y de las concepciones sobre resolución de problemas que el estudiante construye, bajo su óptica de la enseñanza tradicional. La investigación se situó en un modelo cuantitativo, con enfoque descriptivo, en el cual se caracterizó, la recolección de los datos; así mismo, el análisis de estos, permitieron mostrar la existencia de obstáculos epistemológicos y didácticos.

PALABRAS CLAVE:

Obstáculos Epistemológicos, Didáctico, Problemas, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

ABSTRACT

In the study of ordinary differential equations (ODE), in the Bachelor programs in Mathematics and Physics, and Engineering of the Faculties of Education and Basic Sciences and Engineering and Technologies, of the Popular University of Cesar, there are epistemological and didactic obstacles in solving ordinary differential equations textbook problems in students and classroom teachers; specifically, in the application of the knowledge of the sequences of school mathematical knowledge, worked in the classroom of ordinary differential equations. Consequently, the objective of this research was to analyze the epistemological obstacles in solving ODE textbook problems. Finding that there are difficulties for students in solving EDO problems; Therefore, these seem to be related not only by the lack of knowledge of the sequences of mathematical knowledge of the differential and integral calculus; But also, on the epistemic and didactics plane, the hegemony of the algebraic in the historical development of the school mathematical theory of knowledge has allowed the student to turn it into a simple algorithmic fact, without taking into account the epistemological, ontogenetic and didactic; therefore, they are constitutive of algorithm-based teaching and of the conceptions of problem solving that the student builds, from the perspective of traditional teaching. The research was based on a quantitative model, with a descriptive approach, in which the data collection was characterized; Likewise, the analysis of these allowed to show the existence of epistemological and didactic obstacles.

KEY WORDS:

Epistemological Obstacles, Didactics, Problems, Ordinary Differential Equations.

RESUMO

No estudo das equações diferenciais ordinárias (EDO), nos programas de Bacharelado em Matemática e Física, e Engenharia das Faculdades de Educação e Ciências Básicas e Engenharia e Tecnologias, da Universidade Popular de Cesar, existem obstáculos epistemológicos e didáticos para sua solução problemas de livro-texto de equações diferenciais comuns em alunos e professores de sala de aula; especificamente, na aplicação do conhecimento das sequências de conhecimentos matemáticos escolares, trabalhados em sala de aula de equações diferenciais ordinárias. Consequentemente, o objetivo desta pesquisa foi analisar os obstáculos epistemológicos na solução de problemas de livros didáticos de EDO. Descobrir que existem dificuldades para os alunos resolverem problemas de EDO; Portanto, estes parecem estar relacionados não apenas pela falta de conhecimento das sequências de conhecimento matemático do cálculo diferencial e integral; más também, no plano epistêmico, a hegemonia do algébrico no desenvolvimento histórico da teoria matemática escolar do conhecimento permitiu ao aluno transformá-lo em um simples fato algorítmico, sem levar em conta o epistemológico, o ontogenético e o didático; portanto, são constitutivos do ensino baseado em algoritmos e das concepções de resolução de problemas que o aluno constrói, na perspectiva do ensino tradicional. A pesquisa baseou-se em um modelo quantitativo, com abordagem descritiva, em que se caracterizou a coleta de dados; Da mesma forma, a análise destes permitiu evidenciar a existência de obstáculos epistemológicos e didáticos.

PALAVRAS-CHAVE:

Obstáculos Epistemológicos, Didática, Problemas, Equações Diferenciais Ordinárias.

INTRODUCCIÓN

La comunidad de educadores matemáticos, en la contextualización globalizada de la investigación en educación matemática, desde su corta existencia, ha mostrado interés y preocupación por los procesos de enseñanza-aprendizaje, en los entornos académicos escolares y escolarizados, presente en los diferentes entes de carácter gubernamental y no gubernamental de cualquier nivel, orden y grado educativo. Razón por la cual, es de su incumbencia analizar los obstáculos epistemológicos que le impiden a los aprendices (universitarios), aplicar el saber escolar del conocimiento matemático trabajado en el ámbito formativo de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Por ende, en este trabajo los obstáculos epistemológicos, son entendidos como un conocimiento anterior que impide la apropiación de un nuevo saber (Prada, Hernández y Aguilar, 2018, p. 204), lo que implica situar y orientar a los estudiantes a adquirir un nivel más profundo en la apropiación e interiorización del entendimiento y comprensión del conocimiento matemático escolar; en el cual, se evidencie el campo de aplicación de los conceptos estructurantes de las secuencias de los saberes escolares y escolarizados matemáticos, estudiados en la resolución de problemas de libros de textos de ecuaciones diferenciales ordinarias. Este artículo, es producto del desarrollo del proyecto de investigación obstáculos epistemológicos del profesor de matemática, financiado 100% por la Universidad Popular del Cesar; el cual fue ejecutado por el grupo interdisciplinario estudio del pensamiento numérico, políticas públicas de ciencia y tecnología, producción agraria, medio ambiente, y problemática de la educación

Latinoamericana y del Caribe, cuyo objetivo fue analizar los obstáculos epistemológicos en la resolución de problemas de libros de textos de ecuaciones diferenciales ordinarias.

OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS.

La noción de obstáculo epistemológico, aparece por primera vez en el ámbito de la epistemología de las ciencias experimentales, referidos a identificar y poner de manifiesto elementos psicológicos que impiden o dificultan el aprendizaje de conceptos revolucionarios al interior de las ciencias; estos se presentan en todos los sujetos que se enfrentan a nuevas realidades, las cuales se caracterizan por no tener una referencia directa a experiencias directas (Bachelard, 1938); desde el punto de vista de Bachelard, son aquellos que designan lo que hay entre el deseo de conocimiento del científico y el objeto que estudia. Estos fueron incorporados en el año 1976 por Brousseau, en las investigaciones en educación matemática y redefinida en términos de la teoría de situaciones didácticas en los años 70 en Francia, (Inés, 2013, p. 28).

Uno de los primeros problemas que históricamente se conoce y que dio lugar al planteamiento de una ecuación diferencial ordinaria, fue el problema de la curva isócrona, el cual fue abordado por Huygens utilizando métodos geométricos y propiedades de la física. Posteriormente, fue solucionado por Leibniz y Jacques Bernoulli, quienes utilizaron el cálculo infinitesimal (Recalde y Henao, 2018.p. 61). Por ende, pueden ser estudiados en el desarrollo histórico del pensamiento científico y en la práctica de la educación (Bachelard, 1971), puesto que es factible que esta categoría de obstáculos, puedan tener raíces en las matemáticas y más aún en la enseñanza de las matemáticas, en los diferentes niveles de escolaridad (Brousseau, 2006, p. 4). Así, es necesario analizar los obstáculos epistemológicos en la resolución de problemas de EDOs, en un curso común de las

diferentes facultades y programas ofertados por las instituciones de educación superior.

(Mena, Montoya y otros, 2007, p. 329), indican que los obstáculos epistemológicos suelen tener raíces profundas en la propia matemática, y además pueden investigarse en la historia de esta; razón por la cual, se caracterizan por la persistencia con la cual reaparecen en diversas situaciones y lo determinante que son para el logro del aprendizaje matemático escolar. Desde el punto de vista de (Glaeser, 1981, tomado de Cid, 2000, p. 4), considera prematuro precisar demasiado el término “obstáculo” y lo utiliza con un sentido amplio, equiparándolo a “dificultad”, “umbral”, “síntoma”, entre otros. No obstante, para Brousseau, describe (Barrantes, 2006, p. 3 n°2), los obstáculos epistemológicos, constituyen un conocimiento que tiene validez y es funcional en un contexto, pero fuera del contexto o en otro contexto determinado y más amplio es disfuncional; es decir, genera respuestas falsas. De modo que no se puede llegar a entender, que un obstáculo es un conocimiento falso, si no como un conocimiento que está obstaculizando la construcción de un nuevo saber. Desde esta perspectiva, un obstáculo es un conocimiento que problematiza la comprensión y el aprendizaje de uno nuevo. Por ende, una característica principal de los obstáculos epistemológicos es que son constitutivos del saber; por esta razón, es posible identificarlos en la historia del propio concepto (Recalde y Henao, 2018.p.66).

Para una mejor disertación los obstáculos que atienden a su origen son clasificados en Ontogenéticos, Epistemológicos y Didácticos (Brousseau, 1983, 1989, 2006); en tal sentido, el ontogenético está relacionado con las limitaciones del sujeto en algún momento de su desarrollo; por lo tanto, su origen es genético. Los epistemológicos, son obstáculos que se pueden presentar en la enseñanza de la matemática, su origen se encuentra en el

conocimiento anterior que es funcional en un contexto, pero se torna disfuncional en otro. Y el Didáctico, están ligados con la orientación y decisiones que tome el docente.

Esta investigación enfatiza, en las dificultades asociadas a los conocimientos de los saberes matemáticos escolares y escolarizados del estudiante y a lo didáctico por parte del docente, que impiden o imposibilitan un razonamiento reflexivo y argumentativo; puesto que, en el terreno didáctico, la fuerza de la enseñanza está basada en algoritmos; lo mismo, que en el status inframatemático del plano gráfico en la enseñanza, y en el mito de la resolución de problemas completos (Artigue, Douady, Moreno 1995, p. 41), referido esto al inicio del proceso de resolución de un problema de libro de texto de EDO, por parte de los estudiantes en formación de profesores de matemáticas y física, y los futuros ingenieros ambientales y sanitarios, en la Universidad Popular del Cesar.

Históricamente, el estudio de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias, se ha desarrollado en tres grandes escenarios, el algebraico, el numérico y el geométrico (Nápoles 2003, p. 168). Desde el punto de vista matemático, prevalecen estos escenarios, donde en el primer escenario se subraya el funcionamiento y el desarrollo de la teoría de las ecuaciones diferenciales. En donde, se profundiza en la enseñanza tradicional de la resolución de problemas por formulas, bajo el enfoque algorítmico-algebraico, en el cual su aspecto procedimental sigue siendo objeto de estudio tanto desde el punto de vista didáctico como del matemático.

A juicio de (Artigue, 1992, referenciado por Collante 2019, p. 3), en la enseñanza de las EDOs se dedica una gran cantidad de tiempo a desarrollar métodos para resolver ecuaciones bien clasificadas, y se da muy poco énfasis a la representación geométrica de las soluciones,

o al análisis de los resultados. Un enfoque así, da lugar a que en las imaginaciones de los estudiantes se produzca una imagen restringida e insatisfactoria del comportamiento de las soluciones de una EDO.

Con base en (Nápoles 2003, p. 169), en el plano algebraico, están presentes los escenarios numéricos y geométricos. Por ende, para el caso, que no se conozca o no exista un método adecuado para calcular la solución exacta de una ecuación diferencial ordinaria, en libros de textos por medio de la integral definida, se recurren a métodos numéricos, en la cual la intensidad de operaciones numéricas comúnmente, es mediante ayuda de ordenadores o software computacional, de la cual también se necesita en el escenario geométrico, en donde se manejan y grafican curvas compatibles con el campo de pendientes.

El aspecto geométrico y numérico, no es el escenario propio de esta investigación; es en el marco algebraico, donde se desarrolla y conoce el significado de la solución de ecuaciones diferenciales ordinaria de libros de textos; destacando de esta manera, que no se abandonan los aspectos mencionados en el inicio de este párrafo, ya que son necesario en la resolución de problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias en el ámbito de la representación gráfica de esta. Lo cual, para la resolución de problemas, el análisis conduce a ecuaciones de variables separables y lineales (primer, segundo orden).

Bajo esta perspectiva, es en el escenario algebraico, donde se estudia el componente matemático tradicional de las EDOs; por ende, se analizan los obstáculos que presentan los estudiantes en la aplicación del saber matemático escolar y escolarizado, en la resolución de problema de libro de texto de EDO, lo cual se concibió a partir, de una encuesta escrita y entrevistas tanto a estudiantes como a los docentes de aula, aplicada a los estudiantes

de los programas de Licenciatura en Matemática y Física; lo mismo, que a los de Ingeniería Ambiental y Sanitaria, de las Facultades de Ciencias Básicas y de Educación, y de Ingeniería y Tecnología.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SEGÚN GEORGE PÓLYA, DESDE EL ENFOQUE DE ALLAN SCHOENFELD.

En esta investigación se tiene en cuenta el trabajo de (Schoenfeld, 1985) sobre la resolución de problemas en que se basó en los trabajos de (Pólya, 1945). Por lo cual, el primer autor propone que, en la resolución de problemas, no solamente hay que tener en cuenta las estrategias heurísticas que menciona Pólya si no también factores, como:

1°. Recursos: Referidos a los conocimientos previos que posee el estudiante (Barrantes, 2006, p. 2, n°1), como son las fórmulas, los conceptos, los algoritmos, que pueden ser en ocasiones mal entendidos y lógicamente poco entendibles y comprendidos. **2°. Heurísticas:** Pólya propone, una situación común para todo tipo de problema, pero en cambio Schoenfeld plantea que algunos problemas necesitan de cierta heurística particular, para lo cual (Schoenfeld, 1992, citado por Barrantes, 2006, p. 3, n°1), menciona que, en la resolución de problemas, se necesitan estrategias cognitivas, que incluyen métodos heurísticos, tales como descomponer el problema en simples casos. Esto es, llevar una ecuación diferencial a una estructura ya conocida, para luego resolverla. **3°. Control:** capacidad del estudiante en darse cuenta del éxito o fracaso del proceso de la resolución del problema. Para ello, Schoenfeld advierte que es necesario que el aprendiz, sepa que es capaz de hacer, con que cuenta, cuáles sus limitaciones; es decir, conocerse así mismo en cuanto a la forma de reaccionar ante la resolución de un problema.

Lo anterior, da cuenta del trabajo sobre la resolución de problemas matemáticos de Pólya en (1965 en *castellano*, p. 28). En su primera dimensión menciona “comprender el problema” esto es, si el estudiante no entiende un problema de EDO, no lo va a resolver, y si lo hace es por casualidad. Otra situación para tener en cuenta, en el monitoreo al momento de la resolución de un problema de EDO, según Schoenfeld en su trabajo sobre la resolución de problema, es considerar varias formas posibles de solución y seleccionar una específica. La importancia, del monitoreo empleado al resolver el problema es para poder tener la capacidad de decidir cuándo deja de seguir ese camino, puesto que no lo lleva a la solución de problema, que desde el punto de vista de (Schoenfeld 1985, citado por Santos 1992, p. 21), son estrategias metacognitivas, conllevando ello al control, donde finalmente se revisa el proceso de análisis de resolución del problema en estudio.

Por ende, el monitoreo concuerda con el control del problema que se está solucionando, por lo cual (Schoenfeld, 1989 b), propone como principio epistemológico de la matemática, que los estudiantes reconozcan, que “encontrar la solución de un problema matemático no es el final de la empresa matemática; sino el punto inicial, para encontrar otras soluciones, extensiones, generalizaciones de ese problema”. Por lo tanto, es necesario considerar actividades de aprendizaje sólidas y consistente con los principios epistemológicos, los cuales le permitieron a Schoenfeld (citado por Santos, 1992), proponer algunas actividades de aprendizaje que le permitan al docente el fortalecimiento de ese control en el proceso de resolución del problema en los estudiantes como son:

- a). Resolver problemas nuevos, por parte del docente; b). Tomar videos durante la actividad de resolución del problema; c). Actuar como moderador mientras los estudiantes

discuten problemas en clase; d). Dividir la clase en pequeños grupos, cada grupo con un coordinador. Estas actividades de aprendizaje, que propuso y utilizó Schoenfeld, se pueden emplear para la resolución de problemas en un curso de ecuaciones diferenciales ordinarias; las cuales, se pueden considerar como una estrategia metodológica para localizar, analizar y categorizar obstáculos (Girodan, 1985, p.125). Una última, pero no menos importante dimensión, es el sistema de creencias; comprende la idea que los estudiantes tienen acerca de la matemática y que creencias asumen para la resolución de problemas; Schoenfeld, incluye también las creencias de los profesores, y las creencias sociales con respecto a lo que es la matemática. Estas creencias, son lo que de una u otra forman, hacen parte de los múltiples trabajos del currículo de matemática, y con estos la estructura holística que tiene los libros de textos de ecuaciones diferenciales ordinarias en especial, el Dennis, G Zill (6ta, 2002); (7ma, 2009); (8va, 2015); (9na. 2009); (10ma. 2009).

La situación para tener en cuenta ahora es, ¿cómo trabajar, los saberes disciplinares matemáticos en el curso de EDO, para formar profesores de matemáticas e ingenieros Ambientalistas y Sanitarios, competentes en el contexto global y glocal?; ¿Por dónde empezar? Para ello (Schoenfeld, 1989 citado por Santos 1992, p. 22), plantea que se inicia reconociendo la importancia de relacionar la naturaleza del desarrollo de la matemática, con el proceso de resolver problemas en contextos; donde ellos, junto con Pólya son consciente que existen dificultades en la resolución de problemas de matemáticas, y con ellos problemas de enseñanza; por ende, proponen entonces pensar en el estudiante y su actuar con los saberes matemáticos en contexto, en el aula de clase, con el objetivo de fortalecer la heurística, sin dejar por fuera de esta actividad a los docentes. Donde este último, tenga la capacidad de proponer problemas rigurosos

genéricos, en los cuales se requiera la aplicación del conocimiento del saber matemático escolar y se explique a los estudiantes el porqué de las cosas, los objetivos y a dónde se quiere llegar; esto con la finalidad, que puedan comprender la aplicabilidad de las EDOs, tanto en el campo de la física, las ciencias naturales, la matemática y las ingenierías.

En consecuencia, la actividad de resolver problemas matemáticos es sin duda una actividad de profundización formativa disciplinar tanto en el campo específico de educadores e ingenieros; la cual, es reconocida para su formación como un componente importante en el estudio del conocimiento matemático, puesto que en ambos campos universitarios se estudian conceptos estructurantes matemáticos, teoremas, algoritmos, definiciones, y varias estrategias que son utilizadas para resolver problemas.

FUNDAMENTOS METODOLÓGICOS.

Característica de la población de referencia: 92 estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y Físicas, matriculados y activos; 1614 de Ingeniería Ambiental y Sanitaria, de las Facultades de Educación y Ciencias Básicas e Ingenierías y Tecnologías respectivamente, de la Universidad Popular del Cesar. Sus edades están en el intervalo $18 \leq X \leq 23$, en su gran mayoría están matriculados en el sexto y séptimo semestre.

Muestra: La muestra relacionada correspondió a 39 sujetos informantes así: 27 de Ingeniería Ambiental y Sanitaria; 12 de Licenciatura en Matemáticas y Física, del curso de (EDO). Estos estudiantes fueron incluidos, porque de acuerdo con sus planes de estudios, son los que están matriculados en la asignatura de ecuaciones diferenciales ordinarias. Este grupo fue considerado como significativo por sus conocimientos matemáticos, puesto que es esta la última asignatura de matemáticas que

aparece en su plan de estudio; es decir, se tienen los conocimientos matemáticos suficientes y necesarios, para trabajar situaciones problemas en las EDOs y, además, por la diversidad cultural y social contextual de la muestra.

La técnica de recolección y análisis de datos: Se aplicó un cuestionario constituido por 10 preguntas tipo selección múltiple, de 4 ítems cada una y única respuesta; asimismo, una entrevista a los docentes de aula, como valor agregado; la encuesta presentó las siguientes características: tres referidas a las estructuras de las características de una EDO; cuatro orientadas a la aplicación de los conocimientos fundamentales para la resolución de problemas de libros de textos de EDOs; tres enfocadas en la comprensión y caracterización de los principios básicos aplicados en la resolución de problemas de valor inicial en EDOs; todas ellas cerradas y graduadas en intensidad, sobre el punto de información deseado (Casas, 2002, p. 533), gravitado indiscutiblemente en la medición numérica, el conteo y repetidamente en el uso de la prueba estadística, Chi cuadrado de Pearson, mediante el software R, del programa R studio, con el fin de instituir con exactitud los patrones de comportamiento de la población objeto de estudio de esta investigación (Collatón, 2014, p. 50).

Bajo esta perspectiva, la vía por la cual transitó esta investigación fue en lo empírico-inductivo, puesto que el conocimiento matemático se fundamentó en la experiencia de los argumentos de los conceptos estructurantes de los estudiantes objeto de la muestra; lo mismo, que de la realidad concreta específica de las situaciones problemas planteadas, para llegar a analizar los obstáculos epistemológicos en la resolución de problemas de libro de texto de ecuaciones diferenciales ordinarias. Por ende, la compleja diversidad de los fenómenos de los objetos matemáticos del curso de EDO, pueden ser reducidos a estándares de regularidad

basados en frecuencia de ocurrencia; por lo tanto, este enfoque cumple con ciertos patrones cuyo procedimiento puede ser establecido gracias a la observación de sus repeticiones, lo cual a su vez permitirá inferencias probabilísticas de sus comportamientos futuros. Donde el conocimiento, es un acto de descubrimiento de patrones de comportamiento de la realidad, representados en la observación, medición, experimentación, los tratamientos estadísticos y la instrumentación refinada, entre otros (Padrón, 1998. P.263).

Posteriormente, se formalizó el análisis de las secuencias de los saberes matemáticos programáticos, que siguen 6 Universidades Colombianas: Universidad Popular del Cesar; del Magdalena; del Atlántico; Uninorte; Icesi de Cali, y la de Pamplona. Para sistematizar esta información, se utilizó la Web del buscador Google y otros así: Contenidos programáticos del curso ecuaciones diferenciales ordinarias de universidades colombianas; caracterizando, los textos guías de los saberes matemáticos escolares, los requisitos mínimos exigidos por cada institución para que los estudiantes puedan matricular el curso entre ellos, haber aprobado cálculo integral, y cálculo en varias variables.

DESCRIPCIÓN CUANTITATIVA DE LOS RESULTADOS DE LOS DATOS.

La decisión de las respuestas de los estudiantes, sobre las preguntas a ellos presentadas, son decisiones propias y libres de cualquier insinuación e intervención por parte del docente y del equipo investigador; por ende, sus reflexiones son propias, las consideraron como correctas, que posteriormente fueron aplicadas a la resolución de los problemas de las EDOs. En consecuencia, el análisis del instrumento de recolección de la información (encuesta y entrevistas a estudiantes y profesores), determinó el registro y sistematización de la

información en detalle; permitiendo, identificar y describir los obstáculos que tienen los estudiantes en la resolución de problemas, que se concretizan en las dificultades para resolver correctamente problemas de las EDOs.

Así mismo, resolver correctamente situaciones matemáticas, es fundamentalmente más que conocer la materia, es conocer que

técnicas se usan y cuándo usarlas. Es decir, si tu selección no es correcta, tú estás en dificultades (Schoenfeld, 1987, p. 32). Concepción, que es reveladora en sus trabajos sobre la resolución de problemas de matemáticas. Por ende, para describir, argumentar y categorizar los resultados de las respuestas de los estudiantes, fue necesario establecer los siguientes niveles y categorías:

Cuadro N° 1: Categoría: Análisis descriptivo y argumentativo de las categorías del instrumento de recolección de la información.

Niveles/ Categorías	a. Respuestas correctas	b. Respuestas incorrectas
Nivel A1	Identificar e interpretar las características de una EDO, para su resolución.	Presentan dificultades en Interpretar y caracterizar las tipologías de una EDO; conocen, pero no comprenden el problema.
Nivel A2	identificar y fundamentar el dominio de problemas con valores iniciales en integrales, como prerrequisito y técnica especial en la resolución de problemas en una EDO.	Presenta dificultades asociadas al dominio epistémico de las integrales y sus tipologías, como prerrequisito en la resolución de una EDO.
Nivel A3	Posee estrategias lógicas cognitivas en la resolución de problemas con valor inicial en una EDO.	Experimenta dificultades cuando el contexto del problema es diferente.
Nivel A4	Presentan dominio de las técnicas de integración, factorización y derivación en una EDO	Advierten dificultades asociadas a las técnicas de integración, factorización, derivación y específicamente en las integrales impropias.

Fuente: (García, Arcia, Meza, Pertuz, 2021).

El análisis y caracterización de las 10 preguntas con relación a la estructura de la encuesta fueron los siguientes:

Cuadro N° 2: Categoría: Indicador: Identificar e interpretar las características de una EDO.

Ítems	Proposición N° 1: Una ecuación diferencial es:
A.	Es una ecuación matemática que relaciona una función con sus derivadas.
B.	Es la base general de las derivadas.
C.	De primer grado o ecuación lineal es una igualdad que involucra una o más variables.
D.	Igualdad que satisface uno o más valores de la incógnita.

Fuente: (García, Arcia, Meza, Pertuz, 2021).

Tabla N° 1: Análisis de una ecuación diferencial.

Total, estudiantes aplicadas. N.º	Programa	A.	B.	C.	D.	% de error (Presencia de Obstáculo)	Respuesta correcta
27	Ingeniería %	48.2	7.4	11.1	33.3	51.8	A
12		9	0	1	2		
	Matemáticas y Física %	75.0	0	8.3	16.7	25.0	A

Fuente: (García, Arcia, Meza, Pertuz, 2021).

1°. La Tabla N°.1: referida a los análisis de una EDO, indica que: 13 de los 27 estudiantes, de Ingeniería Ambiental y Sanitaria, sus respuestas fueron correctas, lo que cuantitativamente representa el 48.2%. No obstante, 14 de 27, lo hicieron en forma incorrecta, representando esto el 51.8 %; asimismo, 9 de 12, estudiantes de Licenciatura en Matemática y Física, sus

respuestas son correctas, representados en el guarismo del 75.0%. Mientras, que 3 de 12, sus respuestas fueron incorrecta, lo que equivale al 25.0%. En consecuencia, de acuerdo a la estructura establecida en el cuadro N° 1, los estudiantes de Ingeniería Ambiental y Sanitaria están ubicados en el nivel **A1b** y los de Licenciatura en Matemática y Física en **A1a**.

Cuadro N° 3: Categoría: Indicador: Clasificar tipologías de EDOs

Ítems	Proposición N° 2: Clasificar las tipologías de las ecuaciones diferenciales
A.	Linealidad, número y orden.
B.	Orden, tipo y raíz.
C.	Grado, orden y linealidad.
D.	Linealidad, potencia y raíz.

Fuente: (García, Arcia, Meza, Pertuz, 2021).

Tabla N° 2: Análisis de la clasificación de las tipologías de las ecuaciones diferenciales.

Total, estudiantes aplicadas. N°.	Programa	A.	B.	C.	D.	% de error (Presencia de Obstáculo)	Respuesta correcta
27	Ingeniería %	7.4	0	88.9	3.7	11.1	C
12	Matemáticas y Física %	8.3	0	91.7	0	8.3	C

Fuente: (García, Arcia, Meza, Pertuz, 2021).

440

2°. De acuerdo con la Tabla N°. 2, la cual fundamenta el análisis de los tres tipos de clasificación de las ecuaciones diferenciales, confirma que: 24 de los 27 estudiantes de Ingeniería Ambiental y Sanitaria, sus respuestas fueron correctas, los cuales están representados en un 88.9%; ubicándose en el nivel **A1a**, de acuerdo con el cuadro N.º 1; en ese mismo

sentido, 3 de 27, respondieron en forma incorrecta, sustentados en un 11.1%. Asimismo, 11 de los 12 estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y física, sus respuestas fueron correctas, argumentado en el 91.7%, lo que implica que de acuerdo con las categorías del cuadro N° 1, se sitúan en el nivel **A1a**; mientras que 1 de 12 contestó en forma incorrecta, equivalente al 8.3%.

Cuadro N° 4: Categoría: Indicador: Caracterizar la ecuación diferencial: $x^3yy''' - x^2yy'' + y = 0$

Ítems	Proposición N° 3: Clasificar la tipología de la ecuación diferencial presentada
A.	Ordinaria, orden 2, grado 1, no lineal.
B.	Parcial, orden 2, grado 1, no lineal.
C.	Ordinaria, orden 3, grado 1, lineal.
D.	Parcial, orden 1, grado 1, lineal

Fuente: (García, Arcia, Meza, Pertuz, 2021).

Tabla N° 3: Análisis de las tipologías de la EDO: $x^3yy''' - x^2yy'' + y = 0$.

Total, estudiantes aplicadas. Nº.	Programa	A.	B.	C.	D.	% de error (Presencia de Obstáculo)	Respuesta correcta
27	Ingeniería %	18.5	0	77.8	3.7	22.2	C
12		2	0	10	0		
	Matemáticas y Física %	16.7	0	83.3	0	16.7	C

Fuente: (García, Arcia, Meza, Pertuz, 2021).

3°. La Tabla N°.3, representa el análisis de las tipologías de una EDO, la cual asevera que: 21 de los 27 estudiantes de Ingeniería Ambiental y Sanitaria, sus respuestas fueron correctas, apoyado esto en un 77.8%; no obstante, 6 de 27, contestaron de manera incorrecta, sustentados en el guarismo de 22.2%. Significa lo anterior, que están ubicados en **A1a**, de

acuerdo al cuadro N° 1. En ese mismo orden de ideas, 10 de 12 estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y física, contestaron en forma correcta, representado en el 83.3%, y 2 de 12 respondieron en forma incorrecta sustentados en un 16.7%; que según el cuadro N°. 1, pertenecen al nivel **A1a**.

Cuadro N° 5: Categoría: Indicador: Valor de la constante de integración

Ítems	Proposición N° 4: Para encontrar el valor de la constante de integración en la integral Ud. utilizó
A.	La fórmula de integración.
B.	Los límites de integración.
C.	Los valores iniciales.
D.	Los límites y los valores iniciales.

Fuente: (García, Arcia, Meza, Pertuz, 2021).

Tabla N° 4: Análisis del cálculo del valor de la constante de integración

Total, estudiantes aplicadas. Nº.	Programa	A.	B.	C.	D.	% de error (Presencia de Obstáculo)	Respuesta correcta
27	Ingeniería %	18.5	11.1	40.8	29.6	59.2	C
12		2	0	10	0		
	Matemáticas y Física %	16.7	0	83.3	0	16.7	C

Fuente: (García, Arcia, Meza, Pertuz, 2021).

4°. La Tabla N°.4, referida al análisis de hallar el valor de la constante de integración en integrales indefinida, verifica que: 11 de 27, estudiantes del programa de Ingeniería Ambiental y Sanitaria, que en porcentaje equivale al 40.8%, marcaron correctamente sus respuestas; mientras que 16 de los 27, sus respuestas fueron incorrectas, equivalente a un

59.2%. Implicando esto de acuerdo al cuadro N° 1, que están ubicados en el nivel **A2b**. Por otro lado, 10 de 12 estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y Física que representan el 83.3%, sus respuestas fueron correctas. No obstante, 2 de 12 lo hicieron de manera incorrecta, avalados por el 16.7%; los cuales están ubicados en **A2a**, según el cuadro N°1.

Cuadro N° 6: Categoría: Indicador: Tipos de integrales

Ítems	Características.	Proposición N° 5: Este tipo de integrales se llama:
A.	Integrales exactas.	$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_a^B f(x) dx$
B.	Integrales periódicas.	$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^b f(x) dx$
C.	Integrales impropias.	$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{\substack{A \rightarrow -\infty \\ B \rightarrow \infty}} \int_A^B f(x) dx.$
D	Integrales por sustituciones diversas	

Fuente: (García, Arcia, Meza, Pertuz, 2021).

Tabla N.º. 5: Análisis de los tipos de integrales.

Total, estudiantes aplicadas. Nº.	Programa	A.	B.	C.	D.	% de error (Presencia de Obstáculo)	Respuesta correcta
27	Ingeniería %	8	3	12	4	55.5	C
12		0	0	9	3		
	Matemáticas y Física %	0	0	75.0	25.0	25.0	C

Fuente: (García, Arcia, Meza, Pertuz, 2021).

5°. La Tabla N°. 5, describe los análisis de los tipos de integrales, los cuales certifican que, 12 de 27 estudiantes del programa de Ingeniería Ambiental y Sanitaria, contestaron en forma correcta sus respuestas, equivalente esto a un 44.5%, cuyos resultados cuantitativos los ubican en el nivel **A2a**. Mientras que, en el programa de Licenciatura en Matemáticas y Física, 9 de 12, respondieron correctamente, sustentado en el

guarismo del 75%; implicando esto un nivel **A2a**. No obstante, 15 de 27 estudiantes del programa de Ingeniería Ambiental y Sanitaria, respondieron en forma incorrecta, representados en el 55.5% categorizándose en el nivel **A2b**. Asimismo, 3 de 12 estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas y Física, respondieron en forma incorrecta, ubicándolos en un nivel **A2b**.

Cuadro N° 7: Categoría: Indicador: Solución de integrales por parte

Ítems	Proposición N° 6: La solución de una integral por parte como esta es:
A.	$uv - \int vdu$
B	$vu \int udu$
C	$vdu - \int vdv$
D	$uv - \int udv$

Fuente: (García, Arcia, Meza, Pertuz, 2021).

Tabla N° 6: Análisis de la solución de integrales por parte.

Total, estudiantes aplicadas. N°.	Programa	A.	B.	C.	D.	% de error (Presencia de Obstáculo)	Respuesta correcta
27	Ingeniería %	74.1	3.7	7.4	14.8	25.9	A
12	Matemáticas y Física %	9	2	0	1	25.0	A

Fuente: (García, Arcia, Meza, Pertuz, 2021).

6°. La Tabla N°.6, representa los resultados de la solución de integrales por parte, la cual ratifica que: 20 de los 27 estudiantes de Ingeniería Ambiental y Sanitaria, sus respuestas fueron correctas, apoyado esto en un 74.1%; no obstante, 7 de 27, contestaron de manera incorrecta, sustentados en el guarismo de 25.9%. Simboliza lo anterior, que están ubicados en **A4a**,

de acuerdo al cuadro N° 1. En ese mismo orden de ideas, 9 de 12 estudiantes, de Licenciatura en Matemáticas y física, contestaron en forma correcta, representado en el 75%, y 5 de 12 respondieron en forma incorrecta sustentados en un 25.0%; que según el cuadro N°. 1, pertenecen al nivel **A4a**.

Cuadro N.º 8: Categoría: Indicador: Identificar factorización correcta

Ítems	Proposición N.º 7: Cuáles de los siguientes incisos son correctos
A.	$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x + 3)$
B	$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$
C	$x^2 - x - 6 = (x - 2)(x - 3)$
D	$x^2 - x - 6 = (x - 2)(x + 3)$

Fuente: (García, Arcia, Meza, Pertuz, 2021).

Tabla N.º 7: Análisis del algebra de la factorización.

Total, estudiantes aplicadas. N.º.	Programa	A. 1	B. 14	C. 2	D. 10	% de error (Presencia de Obstáculo)	Respuesta correcta
27	Ingeniería %	3.7	51.9	7.4	37.0	48.1	B
12		1	9	1	1		
	Matemáticas y Física %	8.3	75.0	8.3	8.3	25.0	B

Fuente: (García, Arcia, Meza, Pertuz, 2021).

7°. La Tabla N.º.7, referida al análisis del algebra de la factorización en polinomios definidos en integrales, verifica que: 14 de 27, estudiantes del programa de Ingeniería Ambiental y Sanitaria, que en porcentaje equivale al 51.9%, marcaron correctamente sus respuestas; mientras que 13 de los 27, sus respuestas fueron incorrectas, equivalente a un 48.1%. Implicando esto de acuerdo al cuadro N.º 1, que están ubicados en **A4a**. Por otro lado, 9 de

12 estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y Física que representan el 75.0%, sus respuestas fueron correctas, los cuales están ubicados en **A4a**, según el cuadro N.º1. No obstante, 3 de 12 lo hicieron de manera incorrecta, avalados por el 25.0%. En consecuencia, la categoría del cuadro **N.º 8**, cuyos valores cuantitativos, están representados en la table **N.º 7**: Identificar el algebra de la factorización, de acuerdo al cuadro N.º1, está ubicada en el nivel **A4a**.

Cuadro N.º 9: Categoría: Indicador: Solución a problemas de valor inicial en ecuaciones diferenciales

Ítems	Proposición N.º 8: Determine dos soluciones del problema de valor inicial PVI: $x \frac{dy}{dx} = 2y, y(0) = 0$
A.	Resuelve, encuentra dos soluciones
B	No Resuelve correctamente
C	Resuelve, no utiliza las condiciones iniciales
D	No inicial la resolución del PVI.

Fuente: (García, Arcia, Meza, Pertuz, 2021).

Tabla N.º 8: Análisis del Problema de Valor Inicial

Total, estudiantes aplicadas. N.º.	Programa	A.	B.	C.	D.	% de error (Presencia de Obstáculo)	Respuesta correcta
27	Ingeniería %	51.9	25.9	14.8	7.4	48.1	A
12		7	3	0	2		
	Matemáticas y Física %	58.3	25.0	0	16.7	41.7	A

Fuente: (García, Arcia, Meza, Pertuz, 2021).

8°. La Tabla N.º.8, simboliza los resultados de la solución de problemas de valor inicial, así: 14 de los 27 estudiantes de Ingeniería Ambiental y Sanitaria, evidencian dos soluciones al PVI, apoyando esto en un 51.9%; igualmente, 13 de 27, no resuelven correctamente la tarea propuesta, representados en un porcentaje de 48.1%; indicando esto, que los estudiantes de Ingeniería Ambiental y Sanitaria están ubicados en el nivel **A3a**. Asimismo, 7 de 12 estudiantes,

de Licenciatura en Matemáticas y física, están representados en el porcentaje 58.3%, los cuales en sus procedimientos establecen las dos soluciones al PVI. No obstante, 5 de 12, no resuelven correctamente la tarea propuesta, equivalente esto al porcentaje de 41.7%. Por consiguiente, los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y física, pertenecen al nivel **A3a**.

Cuadro N.º 10: Categoría: Indicador: Tipologías de los principios básicos para la resolución de una EDO

Ítems	Proposición N.º 9: Tipologías de los principios básicos para la resolución de una EDO
A.	Casos de factorización.
B.	técnicas de integración.
C.	Derivación.
D.	Todas las anteriores.

Fuente: (García, Arcia, Meza, Pertuz, 2021).

Tabla N° 9: Análisis de las tipologías de los principios básicos para la resolución de una EDO.

Total, estudiantes aplicadas. N°.	Programa	A.	B.	C.	D.	% de error (Presencia de Obstáculo)	Respuesta correcta
27	Ingeniería %	7.4	29.6	18.5	44.5	55.5	D
12		0	3	2	7		
	Matemáticas y Física %	0	25.0	16.7	58.3	41.7	D

Fuente: (García, Arcia, Meza, Pertuz, 2021).

9°. La Tabla N°.9, representa los resultados de los análisis de las tipologías de los principios básicos para la resolución de una EDO, la cual ratifica que: 12 de 27 estudiantes de Ingeniería Ambiental y Sanitaria, están ubicados en el porcentaje 44.5% y resuelven correctamente. No obstante, 15 de los 27, responde en forma incorrecta la tarea, avalado esto en el 55.5%. Simboliza lo anterior, que están ubicados en **A4b**, de acuerdo con el cuadro N.º 1. En ese

orden, en lo que respecta a los estudiantes de Licenciatura en matemáticas y física, 7 de 12 estudiantes corresponden al 58.3%, aplican correctamente los principios básicos en la resolución de EDO; de igual manera 5 de 12, indican tener dificultades en la aplicación de los principios básicos en la resolución de EDO, representados en el 41.7% que según el cuadro N°. 1, pertenecen al nivel **A4a**.

Cuadro N.º 11: Categoría: Indicador: Dificultad específica en técnica de integración

Ítems	Proposición N° 10: Para resolver una ecuación diferencial es necesario comprender.
A.	Integrales por fracciones parciales
B	Integrales por sustitución trigonométrica
C	Integrales por partes
D	Integrales impropias
E	Todas las anteriores

Fuente: (García, Arcia, Meza, Pertuz, 2021).

Tabla N° 10: Análisis de las dificultades en las técnicas de integración

Total, estudiantes aplicadas. Nº.	Programa	A.	B.	C.	D.	E.	% de error (Presencia de Obstáculo)	Respuesta correcta
27	Ingeniería %	18.5	11.1	22.2	7.4	40.8	59.2	E
12		3	1	3	0	5		
	Matemáticas y Física %	25.0	8.3	25.0	0	41.7	58.3	E

Fuente: (García, Arcia, Meza, Pertuz, 2021).

10°. La Tabla N°.10, referida a los análisis de las dificultades en las técnicas de integración, verifica que: 11 de 27, estudiantes del programa de Ingeniería Ambiental y Sanitaria, que en porcentaje equivale al 40.8%, marcaron correctamente; no obstante 16 de 27, lo hicieron en forma incorrecta, representados en el 59.2% ubicándose en el nivel **A4b**. En ese mismo sentido, 5 de 12 estudiantes de Licenciatura en matemáticas y física, correspondiente al 41.7%, afirman que sus respuestas son correctas, mientras que, 7 de 12 que representan el 58.3%, responde en forma incorrecta permitiendo esto, ubicarlos en **A4b**, según el cuadro N°1.

ANÁLISIS DESCRIPTIVO-ARGUMENTATIVO DE LOS DATOS.

ANÁLISIS DE LOS OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE LIBROS DE TEXTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

Una situación común, que es imprescindible en el desarrollo inicial del curso de ecuaciones diferenciales ordinarias, en la resolución de problemas de textos de EDO, es la comprensión y apropiación de las características de los conceptos básicos estructurantes; lo mismo, que los procesos del procesamiento de los datos de la constante de integración y la caracterización

de problemas de valor inicial en ecuaciones diferenciales, de cada una de las secuencias de los saberes matemáticos imbricados en cada situación problemática; temáticas que son desarrollada únicamente por el docente en clase (Dennis, G, Zill 7ª, 2009, págs. 2-9). Razón por la cual, las proposiciones descritas y analizadas en cada uno de los indicadores de las respectivas dimensiones, se exteriorizaron con la intención de conocer los conocimientos de los estudiantes en la aplicación de los algoritmos propuestos en cada solución particular presentada, los cuales son relevantes para el normal desarrollo de la asignatura ecuaciones diferenciales ordinarias.

El análisis de las experiencias acopiadas, a través del instrumento de la recolección de la información a los estudiantes, permitieron evidenciar y tener una idea clara de las fortalezas y dificultades, que tienen los estudiantes de los programas de Ingeniería Ambiental y Sanitaria; lo mismo, que los de la Licenciatura en Matemáticas y Física seleccionados en la muestra. Para ello, el grupo investigador típico

los análisis de los datos por dimensiones, a través de tres bloques de proposiciones y categorías así:

Bloque N.º 1: **Dimensión:** Estructuras de las características de las ecuaciones diferenciales ordinarias, cuyos conjuntos de proposiciones comprenden la N.º 1; N.º 2. y N.º 3. Bloque N.º 2. **Dimensión:** Aplicación de los conocimientos fundamentales para la resolución de problemas de libros de textos de EDOs, están integrados por las proposiciones N.º 4; N.º 5. y N.º 6 y N.º 7. Bloque N.º 3: **Dimensión:** Comprensión y caracterización de los principios básicos aplicados en la resolución de problemas de valor inicial en EDOs, sus elementos constitutivos son las proposiciones N.º 8; N.º 9. y N.º 10.

Con base en ellas se analizaron cada una de las dimensiones, teniendo en cuenta el grupo de proposiciones de cada dimensión y los cuatro niveles indicados en el cuadro N.º 1, en las tipologías de los obstáculos epistemológicos y didácticos.

I. Bloque N.º 1: Dimensión: Estructuras de las características de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Tabla N.º 11: Conocer y comprender las estructuras de las características de las ecuaciones diferenciales ordinarias

Total, estudiantes aplicadas. N.º.	Programa	% Respuesta correcta	% (Presencia de Obstáculo)
27	Ingeniería %	71.6	28.4
12	Matemáticas y Física %	83.4	16.6
Total 39		77.5	22.5

Fuente: (García, Arcia, Meza, Pertuz, 2021).

El objetivo de esta dimensión fue conocer y comprender, las estructuras de las características de la EDOs; lo mismo que su lenguaje técnico, a través de los conocimientos manipulado por los estudiantes en las soluciones de una EDO; con base en ellos, se analizaron los cuatro niveles

indicados en el cuadro N.º 1, en las tipologías de los obstáculos epistemológicos y didácticos.

Figura N.º 1: Estructuras de las características de las EDOs



Fuente: (García, Arcia, Meza, Pertuz, 2021).

Figura N.º 2: Conclusión de la dimensión: Estructuras de las características de las ecuaciones diferenciales ordinarias.



Fuente: (García, Arcia, Meza, Pertuz, 2021).

En la gráfica de la figura No. 1 y 2, se puede evidenciar que, del total de los 39 estudiantes seleccionados en la muestra, 30 de ellos que equivalen al 77.5%, manifiestan tener los conocimientos, el entendimiento y la comprensión de las características de una EDO, en las soluciones algorítmicas de problemas de libros de textos de EDO. No obstante, en un análisis más detallado de cada uno de los

indicadores que hacen parte de esta dimensión, es notorio observar que existen dificultades arraigadas en conceptualizar y delimitar una EDO, o en casos más generales si es ordinaria o no; estas dificultades están presente taxativamente, en las ecuaciones con derivadas que fueron trabajadas en las diferentes asignaturas de los cálculos; puesto que, en el

momento actual del desarrollo de una EDO, no la consideran como tal.

Por ende, la descripción de la dificultad para conocer y comprender las estructuras de las características de las ecuaciones diferenciales ordinarias, hace saber, que los estudiantes prefieren responder a partir de sus conocimientos en una situación que contiene específicamente una característica general de ella, o desde el punto de vista de una ecuación, que ellos consideran tradicional. Razón por la cual, esa dificultad no les permite a los estudiantes dar cuenta que donde hay derivadas existe una ecuación diferencial; es decir, asimilan la clasificación de una ecuación

diferencial ordinaria, con una ecuación tradicional, aplicando irreflexivamente sus conocimientos en la sistematización del método correspondiente en la aplicación de una EDO.

En consecuencia, si el estudiante no identifica satisfactoriamente las características de una EDO, esto obstaculiza la resolución de problemas de ecuaciones diferenciales, caracterizando esta situación problémica, como un obstáculo epistemológico ya que está sumergido en sus conocimientos anterior que le dificulta emerger, aceptar, aprender e innovar y reinventar conceptos nuevos, los cuales le dificulta conocer la solución correcta de una ecuación diferencial ordinaria específica (Dennis. G. Zill 7ª, 2009 pág. 39).

II. Bloque N.º 2: Dimensión: Aplicación de los conocimientos fundamentales para la resolución de problemas de libros de textos de EDOs.

Tabla N° 12: Análisis de los conocimientos fundamentales en una EDO.

Total, estudiantes aplicadas. N°.	Programa	% Respuesta correcta	% (Presencia de Obstáculo)
27	Ingeniería %	52.8	47.2
12	Matemáticas y Física	77.1	22.9
Total 39		64.95	35.05

Fuente: (García, Arcia, Meza, Pertuz, 2021).

Resolver óptimamente una EDO, implica tener por parte del estudiante los conocimientos previos precisos, puesto que estos ofrecen caminos diversos para su tratamiento. En esencia las asignaturas que son necesarias para el curso de EDO son Matemáticas fundamentales, Álgebra Lineal, Cálculo Multivariable este tiene previo el (Diferencial y el Integral) y son imprescindibles los siguientes saberes del conocimiento matemático escolar: conocimientos en Factorización, en Matrices y determinantes, en operadores y sistemas lineales, en cálculo diferencial en una y

varias variables, integración en una variable e integrales múltiples respectivamente, (Plan de asignatura y estudio de EDO, Universidad Populares del Cesar vigente); manipular y operar estos conocimientos, le permite al estudiante la capacidad de reducir problemas complejos a reglas y procedimientos sencillos; razón está, que obliga a que el estudiante en el curso de EDO posea los conocimientos fundamentales de los conceptos estructurantes de cada una de las secuencias de los saberes como prerrequisitos para cursar la asignatura de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Figura N.ª 3: Análisis de los conocimientos fundamentales en una EDO.



Fuente: (García, Arcia, Meza, Pertuz, 2021).

Figura N.ª 4: Conclusión de la dimensión: Aplicación de los conocimientos fundamentales para la resolución de problemas de libros de textos de EDOs.



Fuente: (García, Arcia, Meza, Pertuz, 2021).

La gráfica de la figura No. 3 y 4, permite justificar que, del total de los 39 estudiantes seleccionados en la muestra, 25 de ellos, representan el 64.95%, exteriorizan tener los conocimientos algorítmicos, suficientes y necesarios que de acuerdo al plan de estudio se exigen como prerrequisitos aprobados, para matricular la asignatura de EDO. No obstante, presentan dificultades evidentes en la apropiación y aplicación de la génesis epistémica y didáctica, de los saberes matemáticos al momento de su

utilización óptima en la resolución de problema específico, dónde están presentes las integrales con problemas de valor inicial; las técnicas de integración e integración por formulas y la factorización básica. Esas dificultades se convierten en obstáculos epistemológicos puesto que, su origen se encuentra en el conocimiento anterior que es funcional en un contexto, pero se torna disfuncional en otro (Brousseau, 1983, 1989, 2006). Implicando esto que, el estudio de su corpus teórico se

hizo en forma tangencial, con poca rigurosidad y profundidad epistemológica, independiente del contexto epistemológico y didáctico global y glocal del entorno del problema, sin tener en cuenta la modelación de fenómenos físicos al restablecimiento de un formalismo conceptual al interior del análisis matemático de las EDOs (Recalde y Henao, 2018.p.60).

III. Bloque N° 3: Dimensión: Comprensión y caracterización de los principios básicos aplicados en la resolución de problemas de valor inicial en EDOs.

Tabla N° 13: Análisis de los principios básicos de valores iniciales en EDOs.

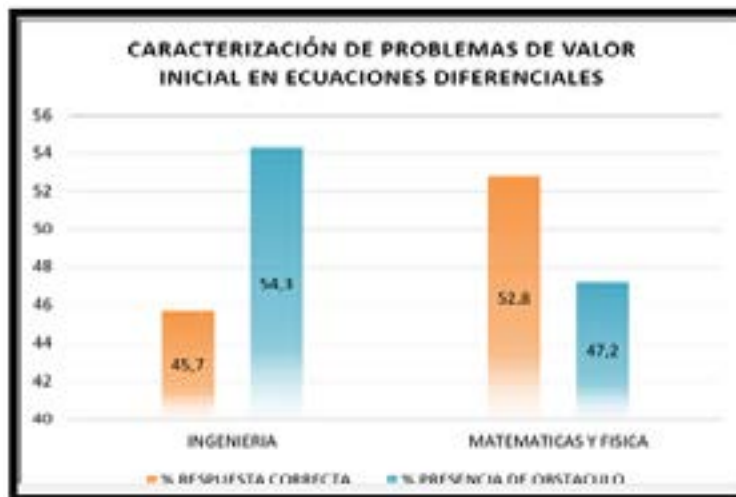
Total, estudiantes aplicadas. N°.	Programa	% Respuesta correcta	% (Presencia de Obstáculo)
27	Ingeniería %	45.7	54.3
12	Matemáticas y Física %	52.8	47.2
Total 39		49.25	50.75

Fuente: (García, Arcia, Meza, Pertuz, 2021).

La comprensión y caracterización de los elementos estructurantes de los conocimientos básicos aplicados en la resolución de problemas de valor inicial en EDOs, es tener la claridad meridiana que cuando evoluciona, la aplicación de las secuencias de los saberes escolares, a una situación donde cambie el contexto del saber

del objeto matemático; es decir, del contexto del cálculo, al contexto de ecuaciones diferenciales ordinarias, el resultado ya no se puede entender como una solución única. No tener este dominio del conocimiento de los dos contextos, se refleja en un obstáculo epistemológico.

Figura N.ª 5: Análisis de los principios básicos de valores iniciales en EDOs.



Fuente: (García, Arcia, Meza, Pertuz, 2021).

Figura N.ª 6: Conclusión de la Dimensión: Comprensión y caracterización de los principios básicos, aplicados en la resolución de problemas de valor inicial en EDOs.



Fuente: (García, Arcia, Meza, Pertuz, 2021).

En el análisis de la figura No. 5 y 6, de los 39 estudiantes que equivalen al 100%; 21 de los 39, representan el 50.75%, aseveran que no comprenden y por lo tanto se les dificulta interiorizar la caracterización de los principios básicos aplicados en la solución de problemas de valor inicial en EDOs. Por ende, presentan en forma incorrecta las razones y los argumentos rigurosos matemáticos, de las secuencias de los saberes matemáticos pertinentes en los análisis de los principios básicos de valores iniciales en EDOs.

Por ende, en la EDO, tomada de (Zill, 2009), ejercicio 1.2 (de problemas de valor inicial, punto 12; se evidenció, que en el análisis de los principios básicos de valores iniciales en EDOs, al momento del estudiante darle solución a problemas de texto de EDO de este tipo, en su análisis cuantitativo normalmente el estudiantes, soluciona la EDO con problema de valor inicial (PVI), y llega a una función que es una familia de soluciones de la ecuación de primer orden (solución general), concepción que poco conciben, puesto que al sustituir las condiciones iniciales en ella, le permite obtener varias soluciones para varias condiciones iniciales, que son solución del problema del valor inicial (solución particular).

En consecuencia, lo anterior les generó a los estudiantes una dificultad de tipo epistémica y didáctico, el hecho que un problema de valor inicial pueda tener más de una solución, situación que es contraria, cuando encuentra una solución única; puesto que no tiene la certeza, de la existencia de una solución y si esa solución es única. Por ende, bajo esas dificultades tan notorias de las comprensión y caracterización de los principios básicos aplicados en la resolución de problemas de valor inicial en EDOs, la solución general que exteriorizan es incorrecta.

En ese orden de ideas, argumentan que a la solución general le aplican la condición inicial para determinar una solución; su razonamiento obedece a que su espectro es netamente numérico puesto que, en el curso de integral, determinan la constante de integración a través de un guarismo. Evidentemente es un obstáculo, de carácter epistemológico y didáctico, puesto que ellos afirman tener ideas claras o arraigadas sobre la única solución al respecto; situación está que les impide aceptar como correcta otras soluciones, puntualmente cuando se está en otro contexto determinado. Ya que el mismo conocimiento es funcional en el contexto de la aplicación de solución

de problema; pero se resiste a aceptar que en otro contexto donde pueda hallar nuevas aplicaciones del saber matemático escolar, en el desarrollo del curso de EDO, muchas veces no es funcional. Y Didáctico, porque están ligados a las orientaciones y decisiones que tome el docente (Brousseau, 1983, 1989, 2006).

A juicio de Brousseau, estos obstáculos constituyen un conocimiento que tiene validez en un contexto determinado, pero que en otros contextos genera respuestas falsas. Desde esta perspectiva, un obstáculo no es un conocimiento falso, sino un conocimiento que está obstaculizando y/o impidiendo la adquisición de un nuevo discernimiento. Una característica principal de los obstáculos epistemológicos, es que son constitutivos del saber; por esta razón, es posible identificarlos en la historia del propio concepto (Brousseau, 2006).

Lo anterior, hace referencia al poco dominio del teorema de existencia y unicidad, que desde el punto de vista de (Dennis. G. Zill 7^a. 2009, p.16), afirma que antes de resolver un problema de valores iniciales es preferible saber si existe una solución, y cuando exista, si es única. Razón por la cual, se puede colegir que, a través de la génesis de las rupturas epistemológicas de las diferentes épocas de la humanidad, los problemas de valor inicial coexistieron y de este modo el incremento de los métodos numéricos rigurosos, que permitieron hallar aproximadamente desde el marco algorítmicos, los valores numéricos de soluciones de problemas de valor inicial, pero que hasta la época de hoy son de segundo plano puesto que no son resolubles. Por lo cual, es otro criterio para fijarlo como un obstáculo de tipo epistemológicos y didácticos.

En consecuencia, si el estudiante no identifica satisfactoriamente las características de los principios básicos aplicados en la resolución de problemas de valor inicial de una EDO, obstaculiza y problematiza sin lugar a

dudas, la resolución de un problema de EDO; puesto que si el estudiante, no posee esas competencias favorables para la resolución del problema, se le dificulta comprender los saberes escolares presentes en la solución de una ecuación diferencial explícita (Dennis. G. Zill 7^a, 2009 pág. 39). Este tipo de dificultad, se puede enunciar como un obstáculo didáctico, característico de la enseñanza del profesor.

No obstante, su origen es colindante y concluyente a un obstáculo de tipo epistemológico, puesto que en la historia de la globalización de las investigaciones en matemáticas, los creadores de los métodos de resolución de problemas como: Descartes, Hilbert, Newton, Leibniz, la familia Bernoulli, Euler, Taylor, Lagrange, Laplace y otros, tuvieron que esperar varios años para su comprensión, caracterización y aplicación, puesto que la rigurosidad geométrica y mecánica, que exigían los problemas matemáticos, originados por la necesidad de dar respuesta a muchos problemas de las ciencias experimentales, por la cual aparecieron nuevas ecuaciones de otras características, y con ellas la necesidad de poderlas comprender.

Por ende, la comprensión y caracterización de los principios básicos aplicados en la resolución de problemas de valor inicial en EDOs, para su resolución ha sido un problema no solamente individual, si no que en el transcurso de la historia, se ha deducido que es una actividad conjunta, para así resolver muchos problemas de la ciencia, la tecnología e innovación; por lo tanto, el paralelismo entre los saberes actuales del estudiante y las rupturas epistemológicas de las secuencias de los objetos matemáticos presentes en una EDO, hacen que él investigue y construya diligentemente la resolución de una ecuación diferencial ordinaria, utilizando muchas veces los ordenadores que se presentan como una herramienta fundamental.

CONCLUSIÓN.

1°. Los obstáculos epistemológicos presente en este trabajo desde la óptica empírica-inductiva, difícilmente lo puede superar un estudiante, puesto que la larga trayectoria de la hegemonía de lo algoritmo-algebraico, en el perfeccionamiento histórico de las estructuras conceptuales teóricas, no le permite visionar las rupturas epistemológicas y sus filiaciones de las secuencias de los estructurantes conceptuales, unidos a la génesis del desarrollo histórico-cultural contextual de los procesos de transposición didáctica, presente en los conocimientos de los saberes escolares de enseñanza-aprendizaje de las EDOs. Por ende, la solución de problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias en los libros de textos, desde lo aritmético y algebraico, demarcando solo lo algorítmico, separa y descontextualiza esto de las estructuras didácticas, limitando los rasgos didácticos y curriculares de enseñar del profesor. Por tal razón, es necesario la intersección del sistema didáctico Vs sistema escolar, para conocer en términos global y glocal las características de las ecuaciones diferenciales.

2°. Los conocimientos de los prerrequisitos, por parte de los estudiantes para el curso de EDO, son deficientes presentado esto muchas veces dificultades profundas al trabajar en los espacios académicos, las secuencias de los saberes de los objetos matemáticos, en el contexto de la resolución de problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Implicando esto, que estas dificultades están presentes en los antecedentes históricos culturales contextuales, de los saberes matemáticos en la evolución de la resolución de problemas de EDO, que por lo tanto se concretizan en obstáculos epistemológicos y didácticos.

3°. El análisis de los obstáculos que posee

el estudiante al momento de la resolución de problemas de texto en EDO, para franquearlos es necesario tener en cuenta las sugerencias que plantea Brousseau, que estos hay que atacarlos desde la génesis del conocimiento matemático y desde allí, fortalecer la capacidad crítica reflexiva del diálogo del saber matemático con el estudiante Vs el docente y ambos actuando en el contexto globalizado de su hábitat; pero que en forma paralela a lo anterior, es necesario hacerle seguimiento riguroso en la aplicación, validación e institucionalización de ese saber.

4°. De los programas curriculares de la asignatura de EDO de las Universidades objeto de la muestra, se evidencia como requisito por parte del estudiante, haber cursado el curso de cálculo integral, cálculo en varias variables, puesto que para resolver problemas de ecuaciones diferenciales de variables separadas, es necesario y suficiente, tener conocimientos de los fundamentos estructurantes de las técnicas de integración y de técnicas especiales, lo que matemáticamente en la resolución de problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias se necesita tener conocimientos de estos cálculos; por tanto, en la asignatura de EDO se posicionan en el acto mismo de conocerlos y saber aplicarlos satisfactoriamente.

5°. El hecho que los estudiantes, no respondan correctamente los cuestionamientos presentados, no se puede establecer de isofacto, que hay existencia de un obstáculo, ya que un obstáculo no adquiere significado por dicho hecho, por ser el mismo un conocimiento; implicando ello, un análisis más profundo por parte del docente en identificar los obstáculos presentes, al instituir situaciones que permitan que el estudiante confronte sus propios conocimientos preconcebidos o arraigados en diferentes contextos, en el proceso de

enseñanza-aprendizaje, de los objetos matemáticos planificados para el desarrollo del curso de EDO.

6°. Identificar un obstáculo, le permite al docente utilizarlo como punto de partida para optimizar las estructuras epistemológicas y didácticas, en la planificación de las secuencias del saber del conocimiento matemático, utilizados en el desarrollo del curso de EDO; conllevando al estudiante, a que sea consciente de sus propias restricciones en el saber matemático, y buscar junto con el docente las estrategias matemáticas, que le permitan superar las situaciones problemáticas de los obstáculos epistemológicos y didácticos presentes en el proceso de aprendizaje del saber disciplinar.

REFERENTES BIBLIOGRAFICAS

Artigue, M; Douady, R; Moreno, L y Gómez, P (Editor). 1995. Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo Editorial Iberoamericana, Bogotá. (Pág. 41)

Bachelard, Gastón. (1988). [1 edición: 1938]. La formación del espíritu científico. México D. F. Siglo XXI.

Brousseau, G. (1976). Obstáculos y problemas epistemológicos en matemáticas. Informes de la XXVIII reunión del CIEAEM, Bélgica.

Bachelard, G. (2007). Formación del espíritu científico. La contribución a un Psicoanálisis del conocimiento objetivo. México: Siglo XXI Editores.

Brousseau, G. (1983). Obstáculos y problemas epistemológicos en matemáticas. Investigación en Didáctica de las Matemáticas.

Brousseau, G. (1989). Obstáculos epistemológicos y didáctica matemática. En N. Bednarz, & C.

Garnier, Construcción de conocimiento, obstáculos y conflictos. Montreal: CIRADE Les éditions Agence d'Arc Inc.

Brousseau, G. (2006). Los obstáculos epistemológicos. Cuaderno de investigación y formación en educación matemática. Año 1, Número 2, 2006. (pág. 4). Este texto es una transcripción editada de una conferencia impartida por el profesor Hugo Barrantes, el 25 de marzo del 2006 en un Seminario Teórico.

Barrantes, H. (2006): Resolución de problemas, El trabajo de Allan Schoenfeld. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática. Año 1, Número 1, Págs 1 – 9. (pág. 2)

Barrantes, H. (2006): Los Obstáculos Epistemológicos. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática. Año 1, Número 2, Págs 1 – 7. (pág. 3).

Casas J, Repullo J, Donado J. La encuesta como técnica de investigación. Elaboración de cuestionarios y tratamiento estadístico de los datos (I). Aten Primaria 2003; 31(8):527-38. (pág. 533)

Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. Trabajo artículo. Departamento de Matemáticas – Universidad de Zaragoza. (pág. 4)

Collante, A. (2019). Un estudio de la ecuación diferencial ordinaria con estudiantes de ingeniería mecánica mediante una situación problema. Tesis para optar al grado de magister en enseñanza de las matemáticas. Pontificia universidad católica del Perú. (pág. 3)

- Collatón, R. (2014). Introducción al uso de R y R commander para el análisis estadístico de datos en ciencias sociales. Consultado el 09/09/2020 del sitio: https://cran.r-project.org/doc/contrib/Chicana-Introduccion_al_uso_de_R.pdf. (pág. 50)
- Del pilar vera, M. Vera, L. Chévez, S. (2017). Por qué las universidades no desarrollan pensamientos múltiples en los estudiantes: propuesta alternativa. Editorial Revista Virtual Redipe: Año 6, Vol. (10).
- Glaeser, G. (1981), "Epistemología de números relativos", Investigación en Didáctica de Matemáticas, 2 (3), 303-346.
- Henao, S. (2016). La constitución de las Ecuaciones diferenciales ordinarias como disciplina matemática. Un análisis histórico-epistemológico. Universidad Autónoma de Guerrero, Maestría en Educación Matemática. México: Universidad Autónoma de Guerrero.
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista L., (2010). Metodología de la Investigación. Décima edición. McGraw-Hill Interamericana, México.
- Inés, G. (2013). Rastreado la noción de obstáculos epistemológicos, culturales, semióticos, didácticos y otros conceptos asociados para la comprensión en matemáticas. Revista Boletín Redipe, Editorial. Aprendizajes mediaciones II No. 820, 2013,(p. 28) págs.27-32.
- Mena, A. Mena, J. Montoya, E. Morales, A. Parraguez, M. (2015). El obstáculo epistemológico del infinito actual: Persistencia, resistencia y categorías de análisis. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, Vol. (18), N°. 3 México 2015. págs. 329-330. (pág. 329). <https://doi.org/10.12802/relime.13.1832>
- Nápoles, J. (2003). La resolución de problemas en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias: un enfoque histórico. Revista Educación y Pedagogía Vol. (15) N°. 35, (Ejemplar dedicado a: Enseñanza de las matemáticas), págs. 163-181, (pág. 168)
- Nápoles, J. Rojas, O. (2020). Las ecuaciones diferenciales ordinarias en un contexto realista. Revista Paradigma (Edición Cuadragésimo Aniversario: 1980-2020), Vol. XLI, junio de 2020 / 1004 – 1016.
- Padrón J. G. La Estructura de los Procesos de Investigación. USB, Decanato de Postgrado, Caracas, abril de 1998. Publicado en: Revista Educación y Ciencias Humanas. Año IX, N.º 17 julio-diciembre de 2001. Decanato de Postgrado, Universidad Nacional Experimental Simón Rodríguez. (pág. 263)
- Pólya, G (1989): Cómo plantear y resolver problemas. México. Editorial Trillas.
- Pólya, G. (1945) How to solve it. Princeton: Princeton University Press. Primera traducción al castellano 1965. Cómo planear y resolver problemas. (pág. 28).
- Prada, R. Hernández, C y Aguilar, A. (2018). Otros (2018). Investigación y Praxis en la enseñanza de las Matemáticas. Universidad Simón Bolívar. (pág. 204)
- Recalde, L y Henao, S. M (2018). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo histórico de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Revista EIA, ISSN 1794-1237 / Año XV / Volumen 15 / Edición N.29 / Enero-junio 2018

/ pp. 59-70 Publicación semestral de carácter técnico-científico / Universidad EIA, Envigado (Colombia) DOI: <https://doi.org/10.24050/reia.v15i29.1140>. Disponible online: 10 de mayo de 2018.

Zill, Dennis G. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. Décima edición. México: CENGAGE LEARNING. 2009, 464p.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical problem solving. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1985 b). Metacognitive and epistemological issues in mathematical understanding. In E. A. Silver (Ed.), Teaching and learning mathematical problem solving; Multiple research perspectives (pp. 345-395). London: Lawrence Erlbaum.

Schoenfeld, A. (1989 b). Ideas in the air: Speculations on small group learning, environment and cultural influencer on cognition, and epistemology. International Journal of Educational Research, 13 (1). Pp. 71-78.

Santos, L. (1992). Resolución de problemas; El trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas. Educación matemática, 4(2), 16-23. (págs. 22)

Zill, D., Cullen, M., Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera, sexta edición. Thomson-Learning, 2002.

Zill, Dennis, G. Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado, 7ª. Edición en español. Editorial Thomson, México. 2009. págs. 1-69

Zill, Dennis G. y Warren S. Wright Dennis G. y (2015). Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores a la frontera, Octava Edición CENGAGE Learning.

Zill. Dennis, G. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. CENGAGE Learning, 9a. Edición, 2009.