

RECIBIDO EL 28 DE FEBRERO DE 2021 - ACEPTADO EL 29 DE MAYO DE 2021

ESTRATEGIAS META-COGNITIVAS Y NIVELES DE AUTONOMÍA VISUAL PROMOVIDOS POR UN EDUCADOR MATEMÁTICO EN FORMACIÓN. DESCRIPCIÓN Y EJEMPLIFICACIÓN DE APLICACIÓN DE UN INSTRUMENTO METODOLÓGICO

META-COGNITIVE STRATEGIES AND LEVELS OF VISUAL AUTONOMY PROMOTED BY A MATHEMATICS EDUCATOR IN TRAINING. DESCRIPTION AND EXEMPLIFICATION OF THE APPLICATION OF A METHODOLOGICAL INSTRUMENT

194

Gustavo Adolfo Marmolejo Avenia¹

Oscar Francisco Muñoz²

Raúl Prada Núñez³

UFPS

RESUMEN

La visualización es susceptible de desarrollo.

¹ Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño, San Juan de Pasto, Colombia. Correo electrónico: gustavo.marmolejo.mat@gmail.com. Orcid: 0000-0001-9047-4389

² Área de Matemáticas, Colegio Militar Colombia, San Juan de Pasto, Colombia. Correo electrónico: francisco-munos@hotmail.com. Orcid: 0000-0002-9007-8295

³ Facultad de Educación, Artes y Humanidades, Universidad Francisco de Paula Santander, San José de Cúcuta, Colombia. Correo electrónico: raulprada@ufps.edu.co. Orcid: 0000-0001-6145-1786

La planificación, por su parte, es un sub-proceso meta-cognitivo de naturaleza regulativa que favorece el desarrollo de esta actividad cognitiva. El presente artículo expone un instrumento metodológico. Este permite caracterizar, por un lado, cómo los educadores en formación suscitan la planificación de las acciones visuales pertinentes a la resolución de tareas métricas, y, por otro lado, detectar el efecto

que las decisiones adoptadas producen en la autonomía de los estudiantes. El instrumento de análisis se diseñó de forma mixta (inductiva y deductivamente) y consideró las formas de proceder de 18 educadores en formación en el marco de su experiencia de práctica profesional. Tres categorías de análisis lo conforman: *Operaciones meta-cognitivas de planificación visual*, *Estrategias meta-cognitivas de control visual* y *Niveles de autonomía visual*. A manera de ejemplo, se caracteriza cómo un educador en formación implementó una de las estrategias de planificación por él consideradas. Como conclusión se evidenció que el instrumento es una herramienta poderosa para identificar tanto los tipos de estrategias de planificación contempladas como las dificultades encontradas por los educadores al intentar incluirlas en su praxis educativa.

Palabras clave: Instrumento metodológico, Profesores en formación, Visualización, Planificación, Autonomía.

ABSTRACT

Visualization is susceptible to development. Planning is a meta-cognitive sub-process of a regulative nature that favors the development of this cognitive activity. This article presents a methodological instrument. This allows to characterize, on the one hand, how the educators in training provoke the planning of the visual actions relevant to the resolution of metric tasks, and, on the other hand, detect the effect that the decisions adopted produce on the autonomy of the students. The analysis instrument was designed in a mixed way (inductive and deductive) and considered the ways of proceeding of 18 mathematics educators in training within the framework of their professional practice experience. It is made up of three categories of analysis: meta-cognitive visual planning operations, meta-cognitive strategies for visual control, and levels of visual autonomy. As an example, the

article characterizes how an educator in training implemented one of the planning strategies considered by him. As a conclusion, it was evidenced that the instrument is a powerful tool to identify both the types of planning strategies contemplated and the difficulties encountered by educators when trying to include them in educational practice.

KEYWORDS:

Methodological instrument, Teacher training, Visualization, Planning, Autonomy.

VISUALIZACIÓN, META-COGNICIÓN Y AUTONOMÍA

El abandono de la geometría como objeto de reflexión en los currículos escolares desde la segunda mitad del siglo XX ha generado en las últimas décadas una particular preocupación en el campo de la Educación Matemática (Marmolejo, Prada e Insuasty, 2020). Actualmente, existe en la comunidad educativa internacional una unanimidad en la revitalización de la geometría en los currículos de todos los niveles escolares (Villani, 1998; Duval, 2017; Marmolejo y Mosquera, 2021). En este sentido, la *visualización* constituye una puerta de entrada, soporte e impulso para el desarrollo de actividades de razonamiento y construcción geométrica (Duval, 1998, 2017, Marmolejo y Vega, 2012).

La visualización se entiende como la discriminación de unidades figúrales y de acciones visuales a aplicar sobre ellas, las cuales intervienen al transformar, o intentar transformar, una figura (Marmolejo, Vega y Galeano, 2020).

Pero, la visualización no se adquiere de forma inmediata ni simple (Duval, 2017; Marmolejo y Vega, 2012; Marmolejo, Vega y Galeano, 2020). Al contrario, es susceptible de desarrollo,

es decir, “es una cuestión de tratamiento de información susceptible de un aprendizaje específico” (Marmolejo y Vega, 2012, p. 29).

A pesar de la importancia de esta actividad cognitiva, tiende a ser desatendida como objeto de reflexión en el aula (Marmolejo, Prada e Insuasty, 2020). Cuestión que se refleja cuando muchos educadores no evidencian habilidades visuales (Marmolejo, Sánchez y Londoño, 2017) o cuanto en los libros de texto no se incluyen tareas que susciten su consideración o desarrollo (Marmolejo, Guzmán e Insuasty, 2015; Marmolejo, 2014, 2021).

Los estudios realizados por Duval y su grupo de investigadores aportan elementos para suscitar el desarrollo de la visualización. Por ejemplo, se establece que la visualización debe promoverse independientemente (y de forma previa) al desarrollo del razonamiento (deductivo y argumentativo) y a la construcción de figuras geométricas (Duval, 1998). Asimismo, que las diferentes formas de discriminar información en las figuras (aprehensión perceptual, aprehensión operatoria y aprehensión discursiva) deben ser objeto de estudio, lo anterior en tiempos y espacios distintos (Duval, 2004).

Para el caso del desarrollo de la aprehensión operatoria, se enfatiza en que se debe considerar tres condiciones: las tareas propuestas no deben implicar en su desarrollo ningún tipo de actividad de razonamiento (aplicación de definiciones o teoremas), no debe estar implicado ningún tipo de cambio dimensional en la secuencia de sub-figuras consideradas, y las tareas deben organizarse secuencialmente en función de una variación sistemática de los factores de visibilidad (Duval, 2017).

En cuanto a la aprehensión discursiva, se asigna un rol determinante a la aplicación de tareas de completado de figuras (Duval, 2003). Es decir, tareas donde “los ángulos, los segmentos están parcial o completamente borrados, de manera

que, con un golpe de vista, nada o casi nada se organiza en una forma inmediatamente reconocible” (p. 23).

Así, los estudiantes de forma visual y, con ayuda de instrumentos, podrán aplicar sobre las figuras prolongaciones. Estos trazos promoverán la aparición de puntos de intersección ausentes y permitirán la discriminación de nuevos elementos geométricos.

En este sentido, las actividades de restauración obligan a realizar operaciones como observar una figura fuera de su marco de referencia, prolongar la recta soporte de los segmentos, reorganizar una figura dada y discriminar en una figura, otra, u otras configuraciones.

Otros estudios proponen el área de superficies planas y su articulación con otras magnitudes como tópicos propicios para suscitar el desarrollo de la visualización (Marmolejo y Vega, 2012). Siguiendo este aspecto de análisis, se han identificado diferentes funciones que puede desempeñar la visualización a través del estudio del área y del perímetro (Marmolejo y González, 2013), también se han discriminado operaciones visuales que determinan el estudio de la aprehensión operatoria, las cuales apoyan la aprehensión discursiva (Marmolejo y González, 2013; Marmolejo, Vega y Galeano, 2020). Asimismo, se han determinado estructuras de control para promover la discriminación de flujos visuales específicos (Marmolejo y González, 2015) y funciones que desempeñan estas estructuras de control (Marmolejo, 2020).

Todo lo anterior evidencia la existencia de pautas para promover el desarrollo de la visualización. No obstante, aún no existe en la literatura especializada informes que determinen ¿cómo la aplicación de estrategias meta-cognitivas de planificación asociadas a la visualización posibilitan u obstaculizan el desarrollo de la autonomía en la resolución o comprensión de tareas matemáticas?

Cuestión determinante, pues, la investigación educativa enfatiza en “la importancia de fomentar en los estudiantes de todos los niveles educativos las competencias necesarias para asumir un proceso de aprendizaje autónomo y autorregulado, entre las cuales el manejo de las estrategias cognitivas y meta-cognitivas ocupa un lugar preferencial” (Klimenco y Álvarez, 2009, p. 14).

Lo anterior, no es de extrañar, ya que, por un lado, la autonomía permite la toma de decisiones que susciten la regulación del aprendizaje en función de la meta, el contexto o las condiciones establecidas (Monereo y Castelló, 1997), además, ayuda a dirigir, controlar, regular y evaluar la forma de aprender, asimismo, apoya acciones de naturaleza metacognitiva (Villavicencio, 2004).

De otra parte, la inclusión de estrategias meta-cognitivas promueve el desarrollo de procesos y actividades cognitivas (Schneider y Artelt, 2010) donde la visualización posibilita planificar el proceso de desarrollo de tareas matemáticas a través del cual se incluyen representaciones semióticas bidimensionales (Duval, 2017; Marmolejo y Vega, 2012).

Este informe de investigación focaliza su atención en esta línea de trabajo. Puntualmente, se contempla la meta-cognición como el conocimiento que un sujeto tiene acerca de su propia cognición y la forma como éste regula y controla las actividades o procesos cognitivos puestos en acto (Flavell, 1976). Donde la regulación considera, entre otros sub-procesos, la planificación, es decir, el establecimiento de metas, la asignación de recursos, la elección de estrategias adecuadas y la administración del tiempo (Schraw, Crippen y Hartley, 2006). En cuanto al control sobre las actividades o procesos cognitivos, remite a la planificación de comportamientos y la selección de acciones como la evaluación de las decisiones realizadas

y los resultados de los planes ejecutados, así como los aspectos que las determinan (Balachef y Gaudin 2010).

Por su parte, la autonomía se asume como la capacidad que un sujeto tiene de pensar y tomar decisiones por sí mismo a través de la puesta en articulación de variados puntos de vista (Kamii y López, 1982). Alude al hecho de hacerse cargo del propio aprendizaje e implica ser capaz de pensar por sí mismo con sentido crítico (Holec, 1981).

PROPÓSITO

El presente trabajo tiene un doble propósito: por un lado, presentar un instrumento metodológico para caracterizar las estrategias meta-cognitivas que un grupo de educadores matemáticos en formación (en adelante EMF) consideró para favorecer en sus estudiantes el acto de planificar acciones visuales claves en la resolución de actividades matemáticas (en adelante, estrategias de planificación visual); por otro lado, ejemplificar la aplicación del instrumento metodológico a través de la caracterización de una de las estrategias de planificación visual implementadas por uno de los EMF analizados (codificado como EMF₁).

TÓPICO MATEMÁTICO

El tópico matemático objeto de atención en la presente investigación fue las relaciones entre las magnitudes perímetro y área ($R(p/a)$). Su selección obedece a que el estudio de la $R(p/a)$ exige el tratamiento de figuras bidimensionales. Este tipo de representaciones semióticas implican acciones visuales que favorecen la planificación, pues, permiten, entre otros aspectos, delimitar de entrada la clase de hipótesis o alternativas a considerar en el desarrollo de muchas tareas matemáticas (Duval, 2017; Marmolejo y Vega, 2012).

NATURALEZA DE LA INVESTIGACIÓN

El enfoque de la investigación fue cualitativo (Bisquerra, 1989), pues, se describió e interpretó la aplicación y el efecto de las decisiones de un grupo de EMF en torno a un proceso de enseñanza de un objeto matemático. Las categorías de análisis y la forma como estas se expresaron (descriptores) se extrajeron unas, directamente del proceder de los EMF analizados y de su efecto en los estudiantes; y otras, parcialmente de trabajos previos.

En cuanto a la manera como fueron filtrados los datos, estos se consideraron según los criterios de los investigadores y se acopiaron a través de registros de observación tomados durante la aplicación de cinco tareas (Anexo 1). Se consideró la filmación y registro escrito, a tiempo real, del accionar tanto de EMF como de sus estudiantes. En casos puntuales, con el propósito de comprender, ampliar o precisar el proceder de los EFM o de sus estudiantes o sus propósitos, se aplicaron entrevistas semi-estructuradas.

EL CASO, FUENTES DE DATOS Y TRABAJO DE CAMPO

Los EMF del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño (Colombia) cursan tres asignaturas electivas donde reflexionan sobre la enseñanza de las magnitudes y sus medidas desde una perspectiva meta-cognitiva. Puntualmente, en la primera de las asignaturas electivas la atención recayó en la aprehensión de referentes conceptuales que caracterizan la meta-cognición y su relación con el desarrollo de procesos y actividades cognitivas. En la segunda asignatura se consideró tanto el estudio de la regulación y el control de la cognición y de los subprocesos que le determinan como la discriminación de estrategias meta cognitivas, las cuales suscitan la regulación. Finalmente, en la tercera

asignatura electiva se diseñó un conglomerado de estrategias meta-cognitivas para favorecer la planificación a través de la aplicación de tareas que buscan promover el estudio de las matemáticas.

El caso de estudio aquí contemplado corresponde a un grupo de 18 EMF que participaron en las tres asignaturas electivas reseñadas. La atención recayó en el trabajo realizado en la tercera de las asignaturas electivas. Puntualmente, en el efecto de la aplicación por parte de los EFM del conglomerado de estrategias meta-cognitivas reseñadas en proceso de enseñanza.

Para la aplicación del conglomerado de estrategias meta-cognitivas se consideró las cinco tareas mostradas en el Anexo 1, todas extraídas de una propuesta de enseñanza diseñada en el marco de un programa de cualificación docente para suscitar reflexiones sobre la $R(p/a)$ desde una perspectiva visual (Marmolejo e Insuasty, 2018).

Estas tareas fueron aplicadas en tres sesiones de clase de dos horas cada una. Su ejecución se llevó a cabo en un curso de grado tercero de educación básica (con edades entre 9 y 10 años) en cada una de las instituciones educativas donde los EMF realizaban sus prácticas profesionales.

La participación de los EMF se enfatizó en la presentación de las tareas, en la aplicación de estrategias de planificación, en la promoción, descripciones y explicaciones de los procedimientos realizados. En ocasiones, en la confrontación de los procesos considerados.

En cuanto a la aplicación de las tareas, en la primera sesión de clase se consideró las tres primeras, ejecutándose la primera en grupo y las dos siguientes de forma alterna tanto individual como en binas.

En la primera sesión, se suscitaron reflexiones sobre la relación de las características cualitativas de las figuras con los conceptos de contorno y superficie, sobre el reconocimiento de que las figuras con diferentes contornos pueden ocupar igual área (utilizando fichas del tangram) y la discriminación de pasos que susciten formas de planificar. Enfatizándose, en el proceso, la importancia de la planificación en el desarrollo de tareas matemáticas.

En una segunda sesión de clase, se posibilitó la exploración de herramientas para comparar figuras según sus perímetros y áreas, la “construcción” de figuras con características métricas particulares. Se discutió y formuló los procesos de resolución considerados (los cuales fueron consignados por los estudiantes en sus cuadernos o en hojas de trabajo entregadas por el profesor) y se indujo el análisis de los procedimientos de los estudiantes según su nivel de pertinencia para el desarrollo de las tareas propuestas.

La Tarea 4 fue resuelta en parejas de estudiantes, pero, siempre siguiendo las indicaciones de los EMF.

Finalmente, en la tercera sesión de clase, se consideró la última de las tareas en la que se promovió el análisis de las posibilidades y tipos de relación posibles entre las dos magnitudes en cuestión, igualmente, se posibilitó el establecimiento de conclusiones.

PROCESO DE DISEÑO Y VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO METODOLÓGICO

Para el diseño del instrumento metodológico se procedió, en primera instancia, a identificar las acciones visuales claves para la resolución de las cinco tareas propuestas en la investigación. En una segunda instancia, se determinó los tipos de planificación visual posibles para la resolución de las tareas planteadas. Ya, en

una tercera instancia, se analizó el grado de pertinencia existente entre la actividad cognitiva de visualización, el desarrollo de autonomía y las estrategias meta-cognitivas reseñadas en la investigación educativa.

Lo anterior permitió, de forma previa a la aplicación de las tareas por parte de los EMF, focalizar la atención en tres categorías de análisis: *Operaciones meta-cognitivas de planificación visual, Estrategias meta-cognitivas de control visual y Niveles de autonomía visual*. La discriminación de las formas como aparecen las estrategias mencionadas (descriptores de las categorías) se hizo directamente del accionar de los EMF al aplicar las tareas ya mencionadas y proponer el acto de planificación visual. En la primera categoría, se identificó la inclusión de seis operaciones de planificación visual: *Orientación, Reflexión, Aplicación, Obstáculo, Regularización y Retrospectiva*, dos de ellas coincidieron con operaciones reportadas en investigaciones previas: *Orientación* (Garofalo y Lester, 1985; Artzt y Armour, 1992) y *Reflexión* (Mevarech y Fridkin, 2006).

En relación a la segunda categoría, se evidenció que los EMF no solo incluyeron estrategias de control para favorecer la inclusión de acciones visuales específicas, sino que también asignaron funciones distintas a las estrategias de control consideradas. En este sentido, dos sub-categorías fueron asumidas para la categoría Estrategias meta-cognitivas de control visual: *Estrategias de control y Función de control visual*, respectivamente, con tres y dos descriptores cada una. En el primer caso: *Preguntas, Interacción y visual*; en el segundo caso: *Inductiva y Obstaculizante*.

En cuanto a la tercera categoría de análisis denominada *Niveles de autonomía visual*, se encontró que las decisiones adoptadas por los EMF promovieron tres formas de autonomía: *Favorable, Desfavorable y Parcial*.

Para validar el instrumento metodológico y establecer su grado de confiabilidad se adoptó el proceso seguido en Marmolejo y González (2013), Marmolejo y Mosquera (2021) y Marmolejo (2021). El cual solicitó a tres pares externos (investigadores especializados en el campo de la educación matemática) evaluar la definición, pertinencia, coherencia, cohesión y forma de aplicación de las categorías de análisis reseñadas y sus descriptores. De forma previa los evaluadores fueron informados sobre el problema que se analizaba en la investigación y el proceso en curso. En un primer momento, cada uno de los evaluadores, tras valorar el instrumento, realizó un informe escrito detallado, el cual permitió precisar las definiciones de cada una de las categorías y sus descriptores. Seguidamente, se realizó una fase piloto de codificación. De manera arbitraria y al azar se seleccionaron ocho unidades de análisis. A continuación, se elaboró un documento donde se re-definieron las tres categorías de análisis y sus descriptores, asimismo, se diseñó una rejilla donde se determinarían los descriptores que, en cada una de las categorías, estarían presentes en las unidades de análisis reseñadas. Todo lo anterior fue entregado a los tres evaluadores para que diligenciaran la rejilla de forma individual. También, todos los investigadores en conjunto diligenciaron la rejilla en cuestión.

En un tercer momento, se comparó el proceder de los tres evaluadores con el expuesto por el grupo de investigadores. Se observó que el grado de acuerdo entre los evaluadores y los investigadores fue del 100% para la categoría de *Grado de autonomía visual*, 87.5% para la

de *Estrategias meta cognitivas de planificación visual* y del 75% en la categoría de *Operaciones meta-cognitivas de planificación visual*.

Estos resultados indicaron que las dos primeras categorías eran consistentes y válidas, mientras que la tercera era susceptible de mejora.

Razón por la cual, se solicitó a los evaluadores explicitar los argumentos que suscitaban diferencias entre las codificaciones asignadas por ellos y las reseñadas por los investigadores. Esto con el objeto de precisar cuáles fueron las debilidades en la categoría de *Operaciones meta cognitivas de planificación visual*. Lo cual permitió observar inconsistencias y falta de precisión en la redacción de algunos descriptores de la categoría. En consecuencia, en conjunto, el grupo de investigadores y evaluadores procedieron a re- escribir tales definiciones.

CATEGORÍAS DEL INSTRUMENTO DE ANÁLISIS

Categoría 1: Operaciones meta-cognitivas de planificación

Definidas como las acciones dirigidas a la adquisición de la información, o a las habilidades que involucran el establecimiento y supervisión de objetivos (Zimmerman y Martínez, 1986). Permiten la anticipación y prevención de situaciones de aprendizaje (Rojas, 2006), también posibilitan la regulación de procesos cognitivos adecuando las actuaciones de un sujeto (Paz, 2011) y optimizan el rendimiento académico de los estudiantes (Martínez, 2007).

En la Tabla 1 se definen las operaciones de planificación detectadas en la investigación.

Tabla 1. Descriptores de la categoría Operaciones de planificación

Operaciones de planificación	Definición
Orientación	Invita a identificar cuál es la problemática a resolver en la tarea propuesta. Igualmente, suscita la discriminación de diferencias y similitudes figúrales y visuales entre la tarea propuesta y las tareas previamente desarrolladas.
Reflexión	Determina la pertinencia y la coherencia de las diferencias y similitudes identificadas en la estrategia de Orientación para la planificación del proceso de resolución de la problemática en cuestión.
Aplicación	Establece y aplica un orden lógico, coherente y pertinente de las acciones visuales incluidas en la planificación de la resolución de tareas previas para apoyar el acto de planificación del proceso de resolución de la tarea propuesta.
Obstáculo	Identifica cuestiones que impiden la consideración de elementos figúrales o la discriminación de acciones visuales que apoyan el acto de planificación en la resolución de la problemática planteada.
Regularización	Para inhibir los obstáculos encontrados en la discriminación de acciones visuales que favorezcan la planificación en la resolución de la tarea propuesta, la tarea en desarrollo es transformada o diseccionada en otra(s) tarea(s) que, desarrollada(s) previamente, evidencia(n) procesos visuales, los cuales pueden apoyar, parcial o totalmente, el acto de planificación de la problemática planteada.
Retrospectiva	Una vez desarrollada la tarea en cuestión se procede a discriminar los pasos que, implícita o explícitamente, guiaron la planificación del proceso de resolución de la problemática planteada. Posteriormente, se diferencian los pasos que involucran acciones visuales de aquellos donde esto no es así.

Fuente: Elaboración propia

Categoría 2: Estrategias meta-cognitivas de control

Considera las estrategias, acciones o procesos seleccionados para establecer el control sobre la consideración de actividades o procesos cognitivos específicos o para promover su desarrollo⁴. Este tipo de estrategia posibilita la expresión de “los medios necesarios para realizar selecciones, tomar decisiones y promover juicios que permiten decidir si una acción es relevante o no, o si un problema está resuelto” (Balachef y Gaudin, 2010, p. 192). Al ser consideradas en el proceso regulativo de planificación, este

⁴ No entendido en el sentido Piagetiano que alude a cambios estructurales del pensamiento sino, de forma más amplia, como la transformación de habilidades cognitivas gracias al ejercicio intelectual propiciado al enfrentar situaciones diseñadas con fines específicos.

tipo de estrategias generan oportunidades para apoyar, entre otros muchos aspectos, el desarrollo del pensamiento autónomo (García y Santarelli, 2004), la discriminación de procesos de verificación (Meza, 2004), visualización (Marmolejo y González, 2015; Marmolejo, Vega y Galeano, 2020) y de razonamiento (Lithner, 2004).

Esta categoría de análisis contempla dos sub-categorías: las estrategias de control contempladas y la función que los EMF buscan desempeñen en la resolución de la actividad planteada. En las Tablas 2 y 3 se definen los descriptores que constituyen cada una de estas sub-categorías.

Tabla 2. Descriptores de la categoría Estrategias de control

Estrategias de control	Definición y tipos
Preguntas	Cuestiones que el docente plantea a sus estudiantes para guiar el proceso de planificación mediante la inclusión de acciones visuales. Se consideran dos tipos de preguntas, a saber: abiertas (es necesario una expansión discursiva para dar respuesta a la cuestión planteada) y cerradas (basta con una afirmación o una negación para responder lo solicitado).
Interacción	Formas en que los integrantes de la clase (educadores y/o estudiantes) se relacionan entre sí. La interacción puede ser Bidireccional o Unidireccional. En el primer caso, la intencionalidad es suscitar una interacción “emisor-receptor” donde las decisiones adoptadas surgen de un proceso de negociación de significados. En cuanto al segundo caso, el EMF o un estudiante se dirige a otro estudiante, a un pequeño grupo de estudiantes o al grueso de estudiantes para explicitar indicaciones, precisar formas de proceder o establecer conclusiones. En este caso, no se promueven intervenciones por parte del o los “receptores”. En caso de hacerlo, lo explicitado no modifica el discurso inicialmente considerado.
Visual	Explicitación de Gestos ⁵ (Mcneill, 1992) o inclusión de elementos de control visual (Marmolejo y González, 2015; Marmolejo, Vega y Galeano, 2020) que susciten acciones visuales que, a su vez, favorezcan el acto de planificar el proceso de resolución de la tarea propuesta.

202

Fuente: Elaboración propia

⁵ *Movimiento de las manos que acompaña al ritmo de las palabras y que señalan partes específicas de las representaciones o recrean la imagen de un concepto*

Tabla 3. Descriptores de la función de las estrategias de control incluidas en una actividad

Función de las estrategias de control	Definición
Inductiva	Los elementos de control incluidos en las actividades propuestas pretenden aportar ideas para guiar u orientar la aplicación de acciones visuales claves para su resolución.
Obstaculizante	Los elementos de control incluidos en la actividad en juego pretenden generar obstáculos para la consideración de acciones visuales claves para su resolución.

Fuente: Elaboración propia

Categoría 3: Niveles de autonomía visual-planificativos

Esta categoría considera el nivel de autonomía que los el EMF promovieron para que los estudiantes recurrieran a aspectos visuales en la planificación de procesos de resolución de la tarea planeta. La investigación identificó que

la consideración conjunta de estrategias meta-cognitivas no posibilita siempre un alto grado de autonomía visual-planificativa en los estudiantes. Así, pues, tres Niveles de autonomía visual-planificativos fueron identificados, a saber: Favorable, Desfavorable y Parcial tal como se definen en la Tabla 4.

Tabla 4. Descriptores de la categoría Niveles de autonomía visual-planificativa

Niveles de autonomía visual	Definición
Favorable	Las estrategias meta-cognitivas promovidas por el EMF promueven oportunidades para que los estudiantes asuman de forma totalmente independiente la responsabilidad de recurrir a la visualización para planificar el proceso de resolución de la tarea planteada: los estudiantes de forma totalmente individual establecen los procesos visuales que apoyan el acto de planificar, no recurren al EMF ni para consensuar, discutir o preguntar cuáles aspectos visuales deben considerar para panificación el proceso de desarrollo de la tarea planteada.
Desfavorable	Las estrategias meta-cognitivas promovidas por el EMF no promueven oportunidades para que los estudiantes asuman la responsabilidad de recurrir a la visualización para planificar el proceso de resolución de la tarea planteada: los estudiantes recurren de forma reiterativa (a través de todo el proceso de planificación) al EMF para que les indique cuáles aspectos visuales deben considerar para planificar el proceso de desarrollo de la tarea propuesta.
Parcial	Las estrategias meta-cognitivas promovidas por el EMF promueven oportunidades para que los estudiantes asuman la responsabilidad de recurrir a la visualización para planificar el proceso de resolución de la tarea planteada. En este caso, a diferencia de la Autonomía visual-planificativa favorable, los estudiantes recurren ocasionalmente al EMF para discutir, consensuar o aprobar los aspectos visuales que consideran deben ser contemplados para planificar el proceso de desarrollo de la tarea propuesta. Es decir, en este caso, el proceso de planificación se realiza en acompañamiento.

Fuente: Elaboración propia

UN EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL INSTRUMENTO METODOLÓGICO

El objeto de este apartado es ejemplificar las posibilidades descriptivas que brinda la aplicación del instrumento metodológico. Para ello, se consideró una de las estrategias de planificación visual implementadas por uno de los EMF que participaron en la investigación (en adelante EMF₁). EMF₁ consideró cinco estrategias de planificación⁶ visual: *Inversa*, *Directa-Simple*, *Ejercitación*, *Directa Justificativa* y *Retrospectiva*. Fueron implementadas de forma secuencial. Cada una coincidió con la puesta en desarrollo de cada una de las tareas propuestas. En lo que sigue la atención recae exclusivamente en la primera de las estrategias de planificación visual reseñadas.

Estrategia de planificación inversa. El propósito que EMF₁ asignó a esta estrategia fue que los estudiantes identificaran los pasos (pasos de planificación visual) que se pueden seguir para planificar las acciones visuales pertinentes para la resolución de la Tarea 1⁷. Para lograr lo anterior, EMF₁ suscitó la aplicación secuencial de tres operaciones de planificación visual, a saber:

Operación de orientación. El propósito de esta operación fue evidenciar que las figuras son susceptibles de transformación mediante la aplicación de operaciones visuales. En la Tabla

⁶ - La estrategia *Inversa* propendió a la "comprensión del término planificar y a la discriminación, en retrospectiva, de los pasos que determinan los caminos a seguir".

- La estrategia *Directa-simple* focalizó su atención en la "adaptación de un tipo de planificación, a partir de otro previamente establecido, lo que implicó ignorar o adicionar los pasos a seguir y establecer un nuevo orden de secuenciación".

- Las estrategias de *Ejercitación* y *Directa-Justificativa*, respectivamente, focalizaron su interés "en ejercitar la aplicación del proceso de planificación establecido para resolver tareas previas" y "enfaticar que la planificación varía según el tipo de tarea propuesta y ejercitó el diseño de nuevos procesos de planificación".

- La estrategia de *retrospectiva* "buscó la articulación entre las planificaciones previamente establecidas y las venideras"

⁷ La problemática planteada en la tarea 1 fue utilizar siete figuras (partes de un tangram) para configurar figuras de contornos globales distintos e igual cantidad de área.

5 se ilustran los elementos que determinan la aplicación de la operación de Orientación.

Tabla 5. Operación de Orientación

Estrategias de control	- Visual (Gestos + elementos de control visual: concavidad y convexidad, traslaciones que separaban por completo la superficie de la figura inicial de la figura imagen, ángulos de rotación de medida inferior a 15°).
Función de las estrategias	-Interacción (unidireccional).
Autonomía visual	- Inductiva. - Desfavorable.

Fuente: Elaboración propia

Para incluir esta operación, EMF₁ representó una serie de figuras en papel sobre el tablero. Luego, aplicó sobre ellas operaciones visuales de rotación, traslación y configuración. Para favorecer la discriminación de las operaciones aplicadas consideró rotaciones de medida menor a 15°, traslaciones donde la superficie de la figura imagen por traslación no coincidía con la superficie de la figura inicial, y reconfiguraciones donde las partes a unir evidenciaban complementariedad de formas (concavidad y convexidad).

Adicionalmente, para enfatizar la aplicación de cada operación EMF₁ recurrió a gestos que describían el accionar de la operación aplicada. Por ejemplo, para el caso de la rotación, movía las manos en el sentido de las manecillas del reloj; para el caso de la operación de traslación, movía las manos de un lado a otro o de arriba abajo; y en el caso de la reconfiguración, unía la mano izquierda con la derecha formando

un todo entre ellas. También consideró gestos para indicar el lugar de la figura sobre el cual había sido aplicada la operación (señaló con su dedo el punto de rotación o de traslación o los bordes que por su completitud permitían una reconfiguración).

Asimismo, de forma gestual EMF_1 evidenció la existencia de una figura inicial (figura antes de aplicarle la operación) y una figura final (imagen de la figura inicial): colocaba las dos manos en la parte donde estaba ubicada la figura inicial y luego las movía al lugar donde quedaba la figura final. Una vez hecho lo anterior, EMF_1 mostró a los estudiantes cuáles eran las diferencias y similitudes existentes al aplicar sobre una figura un tipo de operación u otra. Todo lo anterior caracterizó un discurso unidireccional donde EMF_1 impuso el proceso de reflexión a seguir. Los estudiantes, por su parte, en ningún momento tuvieron oportunidad para expresar sus formas de comprender o ampliar las ideas expuestas por EMF_1 .

Operación de aplicación. El propósito de esta operación fue “promover la inclusión de operaciones visuales para resolver la Tarea 1” y “describir el proceso realizado”. En la Tabla 6 se ilustran los elementos que determinan la aplicación de la operación de Aplicación.

Tabla 6. Operación de Aplicación

Estrategias de control	-Visual (elementos de control visual: fraccionamiento dado). - Preguntas (abiertas). - Interacción (unidireccional + bidireccional).
Función de las estrategias	- Inductiva.
Autonomía visual	- Parcial.

Fuente: Elaboración propia

Para aplicar esta operación EMF_1 escribió en el tablero la consigna de la Tarea 1 y entregó un juego de fichas de tangram (recortadas en papel) a cada uno de los estudiantes.

A continuación, solicitó al grueso de estudiantes: “utilicen todas las fichas del tangram para formar figuras de forma distinta y describan en sus cuadernos cómo procedieron”.

EMF_1 pasó de puesto en puesto revisando el proceder de los estudiantes. Luego, los felicitó por haber logrado construir toda una gama de figuras distintas. Pero, llamó la atención al proceso de descripción solicitado: en ninguno de los casos fue realizado. Para vencer esta dificultad, EMF_1 solicitó conformar grupos de trabajo (de tres estudiantes cada uno) y al pasar de un puesto a otro planteó preguntas abiertas (¿cómo te das cuenta que esta es la ficha que va allí?) y cerradas (¿Esta figura la puedes identificar en el tablero?).

En el proceso EMF_1 solicitó explicaciones, justificaciones o ampliaciones encaminadas a precisar o evidenciar cuáles fueron las figuras u operaciones visuales consideradas. Adicionalmente, planteó preguntas como: ¿qué es lo que debes hacer con las fichas que se te entregó? ¿Esta figura cómo la puedes ubicar en ese lugar? De esta manera, EMF_1 identificó dificultades en los estudiantes, asociadas a la superposición de las fichas del tangram y a la discriminación de las operaciones visuales claves (rotación y traslación). En dichos casos, procedió a evidenciar las dificultades reseñadas y les ayudó a superarlas. Lo último, a través del planteamiento de preguntas. Por ejemplo, ¿recuerdan cuando se tenían las fichas del tangram qué hacíamos con ellas? ¿Aplicábamos rotaciones y traslaciones para unir las fichas?

De forma simultánea, mediante la aplicación de déicticos y la consideración de metáforas, EMF_1 llamó la atención sobre particularidades perceptivas claves de las figuras, es el caso, de

sus contornos o partes de él, sus superficies y las divisiones internas de las figuras.

Todo lo anterior puso en evidencia que la inclusión de la operación de planificación visual de Aplicación se caracterizó por la intencionalidad de EMF₁ de liderar el proceso de reflexión de sus estudiantes. Pero, a diferencia de la aplicación de la operación de Orientación, en esta ocasión, ofreció espacios donde los estudiantes podían negociar sus formas de proceder ante las indicaciones dadas.

Operación de retrospectiva. El propósito de esta operación fue explicitar los pasos que los estudiantes consideraron para resolver la tarea y agruparlos para definir pasos de planificación visual. En la Tabla 7 se ilustran los elementos que determinan la aplicación de la operación de Retrospectiva.

Tabla 7. Operación de Retrospectiva

Estrategias de control	- Preguntas (abiertas). - Interacción (bidireccional y unidireccional). - Gestos.
Función de las estrategias	- Inductiva.
Autonomía visual	- Favorable (primera parte de aplicación de la operación). - Desfavorable (segunda parte de aplicación de la operación).

Fuente: Elaboración propia

EMF₁ solicitó la lectura en voz alta de los procedimientos de resolución considerados por cada grupo de trabajo y enfatizó en la importancia de escuchar las intervenciones realizadas. Una vez hecho lo anterior, solicitó a los estudiantes reunirse en grupos de tres, comparar los procedimientos expuestos por sus compañeros e identificar cuáles fueron los

pasos que cualquier estudiante debería seguir para resolver la Tarea 1. Una vez que los grupos de trabajo realizaron la actividad propuesta, EMF₁ solicitó que expusieran sus propuestas al grueso de estudiantes. En el proceso, registró en el tablero algunas de las ideas reseñadas.

Una vez hecho lo anterior, EMF₁ manifestó a sus estudiantes: “lo que coloqué en el tablero son los pasos que cualquier estudiante debe seguir para resolver la Tarea 1”. Y les preguntó: ¿puedo hacer este paso primero [señalando con sus manos la primera de las ideas], luego este [señalando la segunda idea], luego este [señalando la tercera idea] ...?

Uno de los estudiantes, casi gritando, afirmó “no, no están en orden, así no podemos hacer la tarea”. Los demás estudiantes junto a EMF₁ manifestaron aprobación ante la intervención realizada. Entonces, EMF₁ solicitó a los estudiantes que le ayudaran a organizar los pasos en el orden en que debían ser aplicados. Inmediatamente, cuestionó ¿cuál sería el primer paso?, este o este o este ¿Cuál el segundo?, este o este o este, y así sucesivamente. Los estudiantes respondían al unísono. Así, el conglomerado de pasos fue organizado en el tablero en un orden descendente (de arriba abajo). Esto, según su orden de aplicación.

A manera de conclusión, EMF₁ enfatizó: “no deben olvidar que todos estos pasos son necesarios para resolver la Tarea 1. No podemos aplicarlos en cualquier orden. Debemos aplicarlos en este orden [señalando de arriba a abajo los pasos reseñados en el tablero]”. En adelante EMF₁ asumió el control total de la clase y los estudiantes se limitaron a seguir las indicaciones dadas por él. En este orden de ideas, EMF₁ agrupó los pasos reseñados por los estudiantes según su propio criterio. Luego, dibujó una tabla de dos columnas y tantas filas como grupos de pasos había establecido

previamente. En seguida, registró los pasos en la columna derecha de la tabla.

A continuación, EMF₁ manifestó a los estudiantes que era necesario darle un nombre a cada grupo de pasos. Pero, fue él mismo quien

procedió a hacerlo: los registró en la columna de la izquierda tal como se muestra en la Tabla 8. En ningún caso EMF₁ explicó cuál fue la característica común entre los pasos reseñados por los estudiantes que suscitó la asignación de los nombres dados.

Tabla 8. Pasos de planificación explicitados a partir de los procesos de resolución de la Tarea 1

Pasos de planificación de la Tarea 1	Pasos de resolución de la Tarea 1
Comprensión	<ul style="list-style-type: none"> - Leer en voz alta la consigna de la tarea. - Discutir con un compañero qué es lo que nos piden hacer con las fichas del tangram.
Exploración	<ul style="list-style-type: none"> - Identificar cuántas fichas del tangram tenemos. - Determinar las formas de las fichas del tangram. - Unir las fichas del tangram sin recubrir una sobre otra armando así una figura. - Desarmar la figura construida. - Armar otra figura con las fichas del tangram. - Repetir el proceso-
Comparación	<ul style="list-style-type: none"> - Establecer diferencias y similitudes entre las figuras construidas con las fichas del tangram.
Descripción	<ul style="list-style-type: none"> - Redactar el proceso realizado al construir y comparar las figuras.
Evaluar	<ul style="list-style-type: none"> - Leer de nuevo la consigna de la tarea. - Mirar lo que ha hecho. - Verificar que la tarea fue realizada.

207

Fuente: Elaboración propia

Posteriormente, EMF₁ solicitó a uno de los estudiantes leer en voz alta lo que se había escrito en la tabla. Cuando el estudiante finalizó, se dirigió al grueso de estudiantes y enfatizó: “lo que hemos hecho en la tabla nos va a ayudar para aprender algo nuevo, algo muy, pero muy, importante para cuando vamos a resolver tareas en matemáticas ... cuando uno va a resolver una tarea en matemáticas primero debe organizar un plan, o sea pensar que voy a hacer primero, luego que hago de segundo, qué hago de tercero y así sucesivamente... En la tabla [señalando el tablero] está el plan que debíamos considerar para resolver la Tarea 1 ... hacer un plan como este lo vamos a llamar planificación,

a los pasos que debemos seguir para planificar los llamaremos pasos de planificación”.

A continuación, EMF₁ preguntó a uno de los estudiantes: ¿Cuántos pasos de planificación tenemos para resolver la Tarea 1?, el estudiante contó los pasos. EMF₁ le pidió que leyera el nombre de cada paso, el estudiante procedió a nombrar cada uno de los pasos.

Luego, EMF₁ preguntó a distintos estudiantes: “¿por qué creen que le di este nombre al primer paso de planificación?, miren lo que está escrito al lado derecho de la tabla (los pasos de resolución de la Tarea 1)”. Los estudiantes expresaron sus ideas al respecto. Pero, fue

EMF₁, quien, al final, describió cuál fue la característica de los pasos de resolución de la Tarea 1 que debían considerarse para “bautizar” el primer paso de planificación. Este proceso se reiteró tantas veces como pasos de planificación habían sido explicitados en la Tabla 8.

Finalmente, EMF₁ manifestó a sus estudiantes: “siempre es necesario planificar antes de resolver una tarea, así podemos identificar los caminos que debemos seguir, evitar caminos inadecuados, incluso saber en cuál momento debemos detenernos y dar por finalizada la tarea”.

Una vez dicho lo anterior, enfatizó: “todos ustedes [dirigiéndose a los estudiantes] al realizar la Tarea 1 habían planificado pero que no se dieron cuenta que lo habían hecho”.

Para cerrar la sesión de clase, EMF₁ pidió a los estudiantes consignar la tabla en sus cuadernos.

208

Todo lo anterior, permitió a los estudiantes caer en la cuenta que de forma implícita y no consiente habían intentado planificar, parcial o totalmente, las acciones visuales que consideraron en la resolución de la tarea planteada.

CONCLUSIÓN

La inclusión de estrategias meta-cognitivas encaminadas a favorecer la planificación de acciones cognitivas suscita el aprendizaje autónomo (Holec, 1981). Entonces, ¿basta con promover estrategias de planificación para suscitar oportunidades reales para el desarrollo de un pensamiento autónomo? o es posible que algunas estrategias de planificación lleguen a obstaculizar el desarrollo de pensamiento autónomo? o podría suceder que la naturaleza, funcionalidad y efecto de tales estrategias varíe según la actividad o proceso cognitivo o conocimiento involucrado o, incluso, de quien intenta suscitarlas?

Para dar respuestas tentativas a las cuestiones planteadas es necesario considerar ¿cuál es el papel que desempeñan los educadores en la promoción de pensamiento autónomo a través de la inclusión de estrategias de planificación? En consecuencia, detectar ¿cuáles elementos se deben considerar para caracterizar tales estrategias, sus formas de ser aplicadas y sus efectos en el desarrollo de la autonomía?

En este orden de ideas, el presente artículo focalizó su atención en la definición de un instrumento metodológico que caracteriza las estrategias de planificación implementadas por un grupo de educadores en proceso de formación y su efecto en la autonomía de los estudiantes. En este caso, la visualización constituyó la actividad cognitiva de interés.

Para evidenciar la funcionalidad del instrumento metodológico expuesto se caracterizó una de las estrategias de planificación contemplada por uno de los participantes en la investigación. Este ejemplo puso en evidencia que, el promover el desarrollo de la autonomía visual es una cuestión compleja. Al menos, cuando un EMF intenta promover la reflexión sobre qué es planificación visual y cómo puede llevarse a cabo.

Lo anterior se evidencia de forma puntal, por un lado, pues la puesta en escena de algunos elementos de control visual al implementar las operaciones de planificación que determinaron el tipo de estrategia de planificación visual expuesto, no favorecieron, en todos los casos, la planificación de acciones visuales pertinentes ni evidenciaron la promoción de altos niveles de autonomía visual en la forma de proceder de los estudiantes.

Es el caso de la inclusión combinada de preguntas abiertas e interacciones bidireccionales o la inclusión única de preguntas abiertas, los cuales fueron elementos que tienden a obstaculizar tal acto.

Y, por otro lado, que en todos los casos donde las estrategias de control obstaculizaron el acto de planificar, el nivel de autonomía explicitado por los estudiantes fue favorable. No fue así, cuando las estrategias de control indujeron la planificación visual; en estos casos, el nivel de autonomía evidenciado fue desfavorable.

Lo anterior invita a considerar la necesidad de desarrollar nuevas investigaciones (de mayor envergadura) para verificar si tal dificultad está presente en la mayoría de los educadores en formación, incluso, en los educadores con amplia experiencia profesional.

Si es así, entonces es urgente que los programas de formación y cualificación docente generen espacios de reflexión donde se propicien, entre otros aspectos, la experimentación con el diseño de elementos de control que promocionen las estrategias meta-cognitivas que subyacen al acto de planificar y, en cuanto al vínculo aquí estudiado, la generación de espacios donde se reflexione sobre sus efectos potenciales.

De ignorarse lo anterior, los educadores podrían desconocer la complejidad que subyace al hecho de comprender el termino planificar, de establecer su rol en la resolución de tareas y asumir la planificación como una actividad la cual varía según la naturaleza de la tarea propuesta. Por tanto, en sus propuestas de enseñanza, podrían privilegiar elementos de control que induzcan el desarrollo de habilidades y la construcción de conocimiento matemático desde perspectivas totalmente dependiente de las acciones, decisiones y juicios del educador.

De ser así, cuando el contexto de aprendizaje cambie o el educador no esté para “andamiar” al estudiante, la planificación y la autonomía pasarían a ser cuestiones confusas o imposibles, donde los estudiantes, por sí mismos, no contarían con la capacidad de tomar sus propias decisiones, mucho menos de utilizar

las diferentes estrategias meta-cognitivas que guíen la resolución de las tareas por impulso propio (Manoli y Jaume, 2001).

El instrumento metodológico expuesto en el presente artículo funge, pues, como una importante herramienta, no la única, para fundamentar todo este tipo de reflexiones en un programa de formación o cualificación docente.

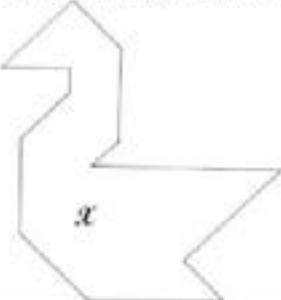
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Artzt, A., y Armour, E. (1992). Development of a Cognitive Metacognitive Framework for Protocol Analysis of Mathematical Problem Solving in Small Groups. *Cognition and Instruction*, 137-175.
- Balacheff, N., y Gaudin, N. (2010). Modeling student conceptions. The case of function. *Issues in Mathematics Education*, 183-211.
- Bisquerra, R. (1989). Métodos de investigación educativa. Barcelona: *Grupo editorial CEAC, SA*.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. Estrasburgo: C. Mammana and V. Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, *Kluwer Academic Publishers*.
- Duval, R. (2003). Voir en mathématiques. *Matemática eductiva*. Aspectos de la investigación actual, 41-76.
- Duval, R. (2004). Cómo hacer que los estudiantes entren en las representaciones geométricas. Cuatro entradas y una quinta. *Madrid: chamorro Ed.*
- Duval, R. (2017). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizaje intelectuales (M. Vega Restrepo, Trad.), (2ª ed.). Cali, Colombia: Pgrama Editorial Univalle
- Flavell, J. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. *The nature of intelligence*, 231-235.

- García, A., y Santarelli, N. (2004). Los procesos metacognitivos en la resolución de problemas y su implementación en la práctica. *Educación Matemática*, 127-141.
- Holec, H. (1981). *Autonomy and Foreign Language Learning*. Oxford: Pergamon.
- Kamii, C., y López, P. (1982). La autonomía como objetivo de la educación: implicaciones de la teoría de Piaget. *Journal for the Study of Education and Development*, 3-32.
- Klimenco y Alvarez, (2009). Aprender cómo aprendo: la enseñanza de estrategias metacognitivas. *Educación y Educadores*, 12(2), 11-28
- Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *Journal of Mathematical Behavior*, 405- 427.
- Manoli, P. y Jaume, S. (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO: un ejemplo concreto. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 19(2), 297-08,
- Marmolejo, G-A. (2021). Función de control visual en el tratamiento del área de superficies planas. Un estudio comparativo de libros de texto colombianos y españoles. Gustavo Adolfo Marmolejo (Ed). *En Conversión, lecturabilidad icónica y función de control visual* (99-126) Editorial Universidad de Nariño. San Juan de Pasto (Colombia)
- Marmolejo Vega y Galeano (2020). Reconfigurando figuras bidimensionales. *revista espacios*, 63 a 80
- Marmolejo, G-A., Guzman, L.Y. y Insuasti, A.L. (2016). Introducción a las fracciones en textos escolares de educación básica ¿figuras representaciones estáticas o dinámicas? *Revista científica*, 23(1), 43-56
- Marmolejo, G. y González, M. (2013). Visualización en el área de regiones poligonales. Una metodología de análisis de textos escolares. *Educación Matemática*, 25(3), 61-102.
- Marmolejo, G., y González, M. (2015). Control visual en la construcción del área de superficies planas en los textos escolares. Una metodología de análisis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.*, 301 - 328.
- Marmolejo, G-A. y Mosquera, S. (2021). (2021). *Razonamiento cuantitativo y demanda semiótico-cognitiva en las guías de orientación de las pruebas saber*. Editorial Universidad de Nariño. San Juan de Pasto (Colombia).
- Marmolejo, G., y Vega, M. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación Matemática*, 7-32.
- Marmolejo, G-A., Sánchez, N. y Londoño, S. (2017). Conocimiento visual de los educadores al promover el estudio de la relación perímetro-área. *REIEC*, 12(2), 18-28.
- Marmolejo, G-A. y Insuasty, E. (2018). Una propuesta de enseñanza para el estudio de la relación perímetro-área. *Revista sigma*, 14(1), 13-30
- Martínez, R. (2007). Concepción de aprendizaje y estrategias metacognitivas en estudiantes universitarios de psicología. *Anales de Psicología*, 7-16.
- Mcneill, D. (1992). *Hand and Mind: What gestures reveal about thought*. Chicago: Chicago University Press.
- Mevarech, Z., y Fridkin, S. (2006). The effects of IMPROVE on mathematical knowledge, mathematical reasoning and meta-cognition. *Metacognition and Learning*, 85-97.

- Meza, V. (2004). Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks: An empirical approach. *Educational Studies in Mathematics*, 255-286.
- Monereo, C., y Castelló, M. (1997). Las estrategias de aprendizaje. Cómo incorporarlas a la práctica educativa. *Barcelona: Edebe*.
- Paz, H. (2011). ¿Cómo desarrollar la metacognición en la educación superior mediante la resolución de problemas? *Ingeniería e Investigación*, 213-223.
- Rojas, T. (2006). Planificación cognitiva en la primera infancia: una revisión bibliográfica. *Acta Colombiana de Psicología*, 101-114.
- Schneider, W., y Artelt, C. (2010). Metacognition and mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 149-161.
- Schraw, G., Crippen, K., y Hartley, K. (2006). Promoting Self-Regulation in Science Education. *Research in Science Education*, 111-139.
- Villani, V. (1998). Perspectives on the teaching of geometry for the 21st Century (Discussion Document for an ICMI Study). En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 337-346). Dordrecht. Netherlands: Kluwer Academic Publishers
- Villavicencio, L. (2004). El aprendizaje autónomo en la educación a distancia. primer *congreso virtual latinoamericano de educación a distancia*, 1-11.
- Zimmerman, B., y Martínez, M. (1986). Development of a structured interview for assessing student use of self regulated learning strategies. *American Educational Journal*, 614-628

Anexo 1: Tareas aplicadas en la investigación

Tarea 1
Reúnanse en parejas y utilicen las fichas del tangram para formar dos figuras distintas
Tarea 2
Utiliza las fichas del tangram para cubrir totalmente la superficie de la Figura (figura representada abajo). No debes sobreponer entre sí las partes de las figuras del Tangram ni dejar espacios de la superficie de la Figura X sin recubrir.

Tarea 3
En la Imagen de abajo se representa un cuadrado que designaremos con la letra Z . De acuerdo al proceso realizado en la tarea anterior verifica si puedes aplicarlo con la figura x . describe en detalle el proceso realizado en este caso.

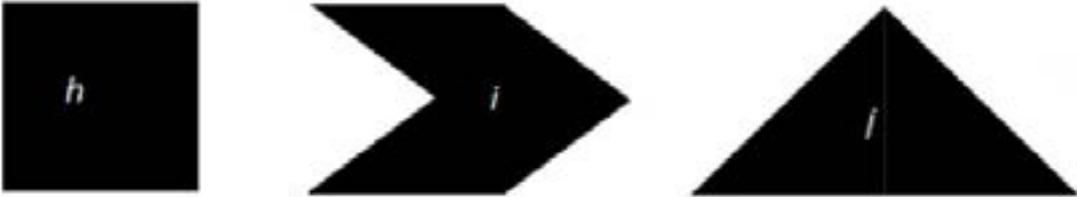
Tarea 4
Utiliza las cintas que te entregó el profesor para comparar el contorno de la figura de superficie z con el contorno de la figura de superficie x .
Tarea 5
Ordena de mayor a menor las figuras abajo representadas. Considera primero las cantidades de superficie de cada una de las figuras y luego sus longitudes de contorno.


Ilustración 1. Tareas utilizadas en la investigación