

RECIBIDO EL 7 DE JULIO DE 2021 - ACEPTADO EL 2 DE OCTUBRE DE 2021

# ERRORES Y DIFICULTADES VINCULADAS AL RAZONAMIENTO CUANTITATIVO ENTRE ESTUDIANTES DE NUEVO INGRESO EN LA CARRERA DE INGENIERÍA

## ERRORS AND RELATED DIFFICULTIES TO QUANTITATIVE REASONING AMONG NEW STUDENTS IN ENGINEERING

Sonia Maritza Mendoza L.<sup>1</sup>

Pastor Ramírez L.<sup>2</sup>

Alejandra María Serpa J.<sup>3</sup>

Universidad Francisco de Paula Santander

379

### RESUMEN

Los errores en el aprendizaje de las matemáticas constituyen un espacio fundamental de investigación en educación matemática, principalmente en lo que concierne al razonamiento cuantitativo, categórico en la formación profesional por cuanto se asocia con las competencias matemáticas necesarias

para la interacción en diversos contextos, tanto profesionales como personales. En el caso de Colombia, el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación ICFES reporta en sus informes sobre las Pruebas Saber que los estudiantes cometen errores de manera reiterada en las preguntas relacionadas con el razonamiento cuantitativo, que sirven de indicador del desempeño de los estudiante al efectuar deducciones con varios procesos de pensamiento. En conexión con esta situación, se desarrolla la presente investigación, destinada a identificar y analizar los errores y dificultades en torno al razonamiento cuantitativo que muestran los estudiantes de primer año de las carreras de ingenierías de la Universidad Francisco de Paula Santander

<sup>1</sup> Doctor en Educación, [soniamaritza@ufps.edu.co](mailto:soniamaritza@ufps.edu.co), Docente Departamento de Matemáticas y Estadística -Universidad Francisco de Paula Santander <http://orcid.org/0000-0001-8477-2937> Cúcuta – Colombia

<sup>2</sup> Magister en Educación Matemática, [pastor-ramirez@ufps.edu.co](mailto:pastor-ramirez@ufps.edu.co), Docente Departamento de Matemáticas y Estadística -Universidad Francisco de Paula Santander <http://orcid.org/0000-0003-3469-5325> Cúcuta – Colombia

<sup>3</sup> Magister en Práctica Pedagógica, [alejandramari-aserpa@ufps.edu.co](mailto:alejandramari-aserpa@ufps.edu.co), Docente Departamento de Matemáticas y Estadística -Universidad Francisco de Paula Santander <http://orcid.org/0000-0002-1249-6379> Cúcuta - Colombia

UFPS, específicamente en las asignaturas de Matemáticas I y II. Para ello, se diseñó y aplicó un instrumento conformado por un conjunto de preguntas enmarcadas en las tres tipologías de error propuestas por el ICFES, teniendo en cuenta las competencias interpretativas, formulación y ejecución y argumentativa. Los ítems estuvieron temáticamente vinculados con la estadística, el álgebra y el cálculo y la geometría. Para la tipificación de errores se eligió la categorización del error de Radatz, complementada con la Socas. Del análisis de los resultados se concluye que los estudiantes presentan, las dificultades y errores más evidentes en relación con la competencia argumentativa, con ítems relacionados a temas de álgebra, cálculo y estadística. Respecto a las categorías de errores, los más destacados son los relacionados con el traspaso entre las representaciones semióticas.

#### **PALABRAS CLAVE:**

aprendizaje, dificultades, errores, educación matemática, razonamiento cuantitativo.

#### **ABSTRACT**

Errors in learning mathematics constitute a fundamental space for research in mathematics education, mainly with regard to quantitative reasoning, categorical in vocational training as it is associated with the mathematical skills necessary for interaction in various contexts, both professional as personal. In the case of Colombia, the Colombian Institute for the Evaluation of Education ICFES reports in its reports on the Saber Tests that students repeatedly make mistakes in questions related to quantitative reasoning, which serve as an indicator of student performance in making deductions with various thought processes. In connection with this situation, the present research is developed, aimed at identifying and analyzing the errors and difficulties related to quantitative reasoning shown by first

year students of engineering careers at the Universidad Francisco de Paula Santander UFPS, specifically in the subjects of Mathematics I and II. For this purpose, an instrument was designed and applied, consisting of a set of questions framed in the three typologies of error proposed by the ICFES, taking into account the interpretative, formulation and execution and argumentative competences. The items were thematically linked to statistics, algebra and calculus and geometry. For error classification, the Radatz error categorization was chosen, complemented with the Socas. From the analysis of the results, it is concluded that students present the most evident difficulties and errors in relation to argumentative competence, with items related to algebra, calculus and statistics. Regarding the categories of errors, the most outstanding are those related to the transfer between semiotic representations.

#### **KEY WORDS:**

difficulties, errors, learning, mathematics education, quantitative reasoning,

380

#### **INTRODUCCIÓN**

El razonamiento cuantitativo constituye un componente de la mayor importancia en la formación profesional por cuanto los conocimientos y competencias asociados a las matemáticas proveen herramientas indispensables para la participación ciudadana activa e informada en los contextos social, cultural, político, administrativo, económico, educativo y laboral [1]. Por esta razón se debe prestar gran atención al desarrollo de estas competencias, considerando no solo los procesos que permiten progresar al individuo en las complejidades del cálculo numérico, sino también las posibles causas que interfieren en el desarrollo de este tipo de habilidades [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8]. En efecto, la detección de los factores que afectan el pleno dominio del cálculo y sus aplicaciones permitiría en principio

reconocer situaciones y sortear dificultades asociadas al aprendizaje matemático, lo mismo que poder intervenir pedagógicamente de modo que este aprendizaje resulte significativo y no la mera repetición acrítica de reglas y procedimientos [9], [10], [11], [12]. A este respecto, Putu [13] señala que “el proceso de resolución de problemas es el objetivo principal en el aprendizaje de problemas matemáticos”. Sin embargo, la resolución de tales problemas no consiste únicamente en ofrecer una cifra o magnitud como resultado de la aplicación de ciertas fórmulas. Resolver un problema consiste principalmente en el razonamiento sobre la pertinencia de los procedimientos matemáticos elegidos y aplicados para tal fin y la adecuada interpretación de los resultados, de modo que se comprenda mejor la situación problemática real de la que se parte y la manera de abordar su resolución en contextos sociales o conceptuales más amplios [14]. Considerado de esta forma, el razonamiento cuantitativo se convierte en razonamiento propiamente dicho, y su enseñanza bajo este enfoque supera situaciones frecuentes en el ámbito educativo en las que el estudiante alcanza un rendimiento satisfactorio en el aprendizaje de las matemáticas (aprueba las materias, incluso con buenas notas) y sin embargo este rendimiento relativamente satisfactorio oculta paradójicamente errores operacionales o procedimentales de los objetos matemáticos y, sobre todo, su cabal comprensión, lo que obviamente repercute en numerosas dificultades para la apropiación subsiguiente de contenidos nuevos y cada vez más complejos [15], [16].

En el ámbito educativo institucional, las dificultades y los errores que presentan los estudiantes en torno al aprendizaje de las matemáticas constituyen un tema común en las conversaciones de los docentes de la disciplina de todos los niveles [17]. Quienes conducen el proceso de construcción de los conocimientos y competencias matemáticas

identifican por su experiencia dificultades y errores recurrentes entre los estudiantes cuando afrontan determinados temas y procedimientos, incluso con independencia de sus capacidades cognitivas, interés, motivación y nivel de compromiso con la propia formación. Esta reiteración de errores típicos entre cohortes sucesivas de estudiantes termina por conformar patrones, y en este sentido no deberían ser ignoradas por los docentes y por la didáctica de la matemática como disciplina [18], [19], [20], [21], [22]. En efecto, si ciertas dificultades y errores se repiten reiteradamente es porque existe una determinada complejidad en la materia, pero sobre todo, un modo improcedente para su abordaje pedagógico [23]. A este respecto, autores como Pochulu [24] señalan que “los errores no aparecen por azar sino que surgen en un marco conceptual consistente, basado sobre conocimientos adquiridos previamente”, y que “todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores, debido a diferentes causas, algunas de las cuales se presentan inevitablemente”. Dicho de otro modo, los errores habitualmente cometidos por los estudiantes reclaman atención específica, pues la experiencia ha establecido que no se trata de dificultades individuales manifiestas por algunos de ellos, con habilidades limitadas para el cálculo y el razonamiento numérico, sino de una casuística sistémica que en consecuencia debe ser estudiada y atendida convenientemente [25], [26], [27], [28], [29], [9].

A propósito de la comisión de errores durante el aprendizaje, las ciencias de la educación en general y la didáctica de la matemática en particular han señalado reiteradamente que se trata de una fase natural dentro de un proceso gradual de desarrollo de habilidades y competencias [30], [31]. En efecto, nada se aprende perfectamente de una vez y para siempre, menos cuando se trata de la aplicación de procedimientos complejos que deben afirmarse cada vez más mediante la

práctica. Visto de esta manera, un error no solo se considera parte de un transcurso inherente al aprendizaje sino que además constituye una prueba de que se avanza en el proceso [32], [18], [33]. En efecto, una respuesta fragmentada o distorsionada muestra que se ha alcanzado al menos un nivel parcial de conocimiento. Desde la perspectiva de la enseñanza, la aparición de errores constituye una importante herramienta para la adquisición de un nuevo y mejor conocimiento [21], pues supone una base sobre la cual poder construir una inteligencia más perfecta de las situaciones problemáticas cuya resolución se propone al estudiante. En cuanto que procesos, la adquisición y consolidación del conocimiento ocurren gradualmente, lo que supone la inevitable aparición de dificultades y errores. Tales errores, afrontados convenientemente, constituyen más bien una oportunidad para avanzar en el normal desarrollo de la comprensión del saber [34].

Por otra parte, conviene que cuando se afrontan en clase los temas que generan errores y dificultades recurrentes, se genere también una situación didáctica que involucre acciones tanto de docentes como de estudiantes, teniendo en cuenta los aportes de la didáctica especial de la matemática. En este sentido, el docente debe estar en conocimiento tanto de los temas que suelen generar mayores dificultades entre los estudiantes como de los recursos didácticos que ofrece la enseñanza matemática para un manejo apropiado de tales dificultades. Pero también el alumno debe ser consciente y estar familiarizado con la idea de que la duda, el desacierto y la reconducción de un procedimiento constituye parte del proceso normal del aprendizaje. En efecto, tal y como afirman Kilpatrick, Gómez y Rico [20], la identificación de los errores puede y debe contribuir positivamente en el proceso de aprendizaje. En lo que concierne al docente, identificar con precisión los errores y dificultades de los estudiantes le permitirá generar y elegir las estrategias más apropiadas para mejorar el

proceso de enseñanza y aprendizaje en torno al razonamiento cuantitativo.

También conviene recordar que en la labor de reconocimiento de los errores y dificultades que enfrentan los estudiantes durante la resolución de problemas matemáticos el profesor no se encuentra desasistido ni cuenta únicamente con su propia experiencia y capacidad creativa y de innovación. En efecto, el campo de las dificultades y los errores en el aprendizaje de las matemáticas ha constituido desde siempre un punto focal dentro de la investigación en educación matemática [34]. Los numerosos estudios que se han llevado a término durante décadas han permitido esclarecer muchos de los aspectos acerca del modo en que los estudiantes aprenden, el grado de maduración cognitiva que se requiere para afrontar determinados temas complejos y las estrategias mejores para conseguir su comprensión [35]. A pesar de todos estos avances, quedan aún muchos interrogantes por solucionar. Por otra parte, las realidades psicosociales locales no siempre son idénticas y los sistemas educativos siguen en cada nación o entidad político-administrativa modelos teóricos y tradiciones de enseñanza elegidos entre un abanico múltiple de posibilidades. También se debe tener en cuenta que la propia enseñanza matemática que han recibido previamente los estudiantes, tanto dentro como fuera del aula, puede inducir a situaciones de desacierto e incorrección, tanto en la elección de los procedimientos como en la obtención de resultados. En efecto, muchos de los errores de los estudiantes surgen de las estrategias y reglas que han adquirido en algún momento de su aprendizaje, formal o informal, de modo que experiencias matemáticas desarrolladas con anterioridad puede influir en el incurrir de faltas durante la resolución de problemas matemáticos [24]. Un espacio interesante para medir las dificultades descritas es el del inicio de una carrera universitaria, sobre todo si en su perfil se incluye un sólido

componente relacionado con el cálculo. En efecto, este momento de la formación constituye un hito importante en la educación de un sujeto; desde el punto de vista institucional, conviene reconocer en esta etapa las falencias en la formación previa de los estudiantes, de modo que se puedan diseñar y practicar intervenciones pedagógicas destinadas a nivelar las competencias iniciales requeridas para llevar a término exitosamente la formación profesional.

En relación con la exposición precedente se propone la presente investigación, destinada a esclarecer y clasificar los errores y dificultades vinculadas al razonamiento cuantitativo entre estudiantes de nuevo ingreso en la carrera de Ingeniería de la UFPS, en la ciudad de Cúcuta. Se trata de una iniciativa que se suma a las que se han patrocinado en otras instituciones a fin de conocer mejor las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes y el eventual modo asumir los retos pedagógicos pertinentes [36], [37], [38], [39].

En el contexto colombiano, una fuente importante fuente de información fiable acerca de los problemas recurrentes entre estudiantes cuando afrontan la resolución de problemas matemáticos es la que aportan los resultados de las Pruebas Saber Pro del Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES por sus siglas).

Las Pruebas Saber Pro, anteriormente conocidas como Examen de Calidad para la Educación Superior, consisten en un examen de carácter oficial y obligatorio que comprueba las competencias de los estudiantes que cursan los programas académicos de pregrado en las instituciones de Educación Superior.

Entre sus propósitos se encuentra la comprobación del desarrollo de las competencias delineadas por el Ministerio de Educación Nacional como finalidad de la educación institucional oficial, tanto al inicio como al final de

los estudios universitarios, y evaluar la calidad de los programas e instituciones de Educación Superior del país. Esta evaluación también permite identificar experiencias exitosas, establecer comparaciones entre instituciones y regiones y, de ser preciso, promover e implementar ajustes en las metodologías de enseñanza, las políticas educativas y el sistema educativo en general. Las pruebas se aplican anualmente, los resultados son públicos y se pueden consultar en la web.

En su informe de resultados del módulo de competencias referidas al razonamiento cuantitativo de la Pruebas Saber Pro de 2016, el ICFES presenta, entre otros muchos datos, información sobre respuestas erradas por parte de los estudiantes que se presentaron a la evaluación, lo cual es tema de interés para la investigación que se reporta en este trabajo. Estas respuestas erróneas se agrupan en torno a los tres ejes de competencias del estudiante que se listan a continuación: a) Valida procedimientos y estrategias matemáticas utilizadas para dar solución a problemas. b) Plantea e implementa estrategias que lleven a soluciones adecuadas ante un problema que involucra información cuantitativa. c) Comprende y transforma la información cuantitativa y esquemática presentada en distintos formatos.

Dado que los datos publicados permiten establecer comparaciones, se presenta ahora un comentario sobre los resultados promedios de todo el país y los específicos de la UFPS. En primer término, es preciso establecer la existencia de una proporción similar de respuestas erradas entre los estudiantes de la institución y el total nacional, con un muy tenue descenso de desaciertos (entre 1 y 2 puntos porcentuales) entre la UFPS con respecto a la población colombiana en su conjunto ( $a=56/57$ ;  $b=48/50$ ;  $c=41/43$ ), lo cual significa que la institución alcanza un rendimiento ligeramente mejor que el promedio nacional. (ICFES, 2016).

Esta paridad relativa entre resultados no deja de ser, sin embargo, preocupante, pues en la institución el 56% de los estudiantes evaluados no validan procedimientos y estrategias matemáticas para dar solución a los problemas, y erran en el 48% de los casos al plantear e implementar estrategias que lleve a soluciones adecuadas frente a un problema que involucra información cuantitativa y en el 41% de las oportunidades no alcanzan a comprender y transformar la información cuantitativa y esquemática presentada en distintos formatos.

Estos datos institucionales ofrecen una perspectiva más específica si se muestra la agregación por grupos de referencia, separando dentro de los resultados relativos a la institución las que conciernen específicamente a las ingenierías. A este respecto, conviene señalar que los programas que se ofrecen en la UFPS son Ingeniería Agronómica, Agroindustrial, Ambiental, Biotecnológica, Civil, Electromecánica, Electrónica, Industrial, Mecánica, Minas, Pecuaria y Sistemas. También es preciso informar que la mayoría de los programas se encuentran en Procesos de Acreditación de Alta Calidad. Comparando los tres conjuntos de datos, es decir, resultados para todo el país, los obtenidos en la institución y los específicos de quienes en ellas se forman en ingeniería tenemos lo siguiente:  $a=57/56/49$ ;  $b=50/48/41$ ;  $c=43/41/33$ . A pesar de que las competencias vinculadas al razonamiento cuantitativo son mejores entre los futuros ingenieros que entre el resto de los estudiantes también es cierto que los resultados no son precisamente óptimos. En efecto, al validar procedimientos y estrategias matemáticas utilizadas para dar solución a problemas el 49% de los estudiantes de estos programas responde incorrectamente, el 41% comete errores cuando se enfrenta problema que involucran información cuantitativa, planteamiento e implementación de estrategias que lleven a soluciones adecuadas y, aunque en una proporción menor pero

igualmente preocupante, el 33% manifiesta dificultades para comprender y transformar la información cuantitativa y esquemática presentada en distintos formatos. [1].

De la exposición precedente se colige la necesidad urgente de establecer un diagnóstico específico dentro de los programas de ingeniería de la UFPS sobre las dificultades y errores que manifiestan los estudiantes cuando se enfrentan a la resolución de problemas que implican razonamiento cuantitativo. Se parte para ello de los resultados de las Pruebas Pro ofrecidos por el ICFES y de tres ejes de competencias que este Instituto ha establecido para esta evaluación, es decir, la validación de procedimientos y estrategias matemáticas utilizadas para dar solución a problemas, el planteamiento e implementación de estrategias que conduzcan a la solución adecuada de problemas que involucren información cuantitativa y la comprensión y transformación de información cuantitativa y esquemática presentada en distintos formatos. En este sentido, la vía que este estudio propone para la adquisición de información más precisa consiste en el diseño y aplicación de un instrumento con forma de prueba que detecte las dificultades y errores de los estudiantes. Para que el estudio resulte aún más esclarecedor, se propone realizar una posterior clasificación de las dificultades encontradas en un contexto menos ecuménico que el de las Pruebas Saber Pro en categorías más simples, de modo que se facilite la comprensión y dimensión de la dificultad entre los estudiantes del programa y la Universidad objeto de estudio. Con todo ello se pretende en última instancia generar insumos para el planteamiento de futuros proyectos dirigidos a la solución de estas dificultades.

En suma, el propósito de esta investigación consiste en la identificación de las dificultades y los errores que manifiestan los estudiantes del primer año de ingenierías de la UFPS para

la resolución de situaciones problemáticas que implican razonamiento cuantitativo. Para ello, se propone elaborar un instrumento que permita visualizar y determinar los errores y dificultades que presentan los estudiantes y su posterior categorización, de modo que aparezca con mayor nitidez la dimensión real del problema y se pueda acometer desde una perspectiva didáctica más apropiada.

## MARCO TEÓRICO

Para abordar la investigación conviene tener en cuenta los tres grandes campos conceptuales en los que se enmarca: errores, dificultades y razonamiento cuantitativo. Se entiende que los errores y dificultades se restringen aquí al desempeño de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos.

## ERRORES

Todo docente, en particular el de matemáticas, constata continuamente que sus estudiantes cometen numerosos errores y, además, de manera reiterada. Cuando se observa con atención, se advierte que esta reiteración en el error no es individual, sino que constituye patrones. Dicho de otro modo, distintos estudiantes en distintos cursos suelen cometer el mismo tipo de desaciertos cuando acometen el estudio de determinados temas. Desde la didáctica de la matemática ha habido un interés creciente en el estudio del error para comprender por qué los estudiantes yerran insistentemente de la misma forma a fin de proporcionar al docente herramientas didácticas útiles para su superación. De este modo, el estudio del error puede conducir a mejores resultados en la enseñanza y de hecho, la bibliografía especializada en este particular se ha acrecentado en el último tiempo.

Sobre este particular, Rico [19] realiza una revisión sobre el estudio de los errores en el aprendizaje de las matemáticas, expone la

caracterización condicionada por los objetivos y formas de organización de los currículos de matemáticas y las corrientes predominantes en el momento de la psicología y la pedagogía. El autor hace referencia a la noción de organizadores para articular el diseño, desarrollo y evaluación de cada unidad didáctica, considerando como organizadores los errores y dificultades en el aprendizaje. En este sentido, Rico [19] considera que el error constituye, más que un escollo, una herramienta en el proceso educativo. Por su parte, Lupiáñez [40], basándose en la revisión de Rico [19] anteriormente citada, propone una categorización del error y sus implicaciones pedagógicas: 1. análisis, causas y tipologías de errores; 2. tratamiento curricular de los errores; 3. los errores y la formación del profesorado; 4. técnicas de análisis de los errores. El autor también reafirma que los procesos de aprendizaje suponen el cometimiento de errores sistemáticos y por ello, se transforman en objeto de disertación para la educación matemática.

Quando se observa el desempeño de los estudiantes universitarios en las áreas de la matemática, se advierte que la mayoría presenta u oculta dificultades operacionales, estructurales y procesales de los objetos matemáticos de todo tipo y nivel, incluyendo a quienes presentan una actuación en apariencia satisfactoria pero que no poseen, aunque realicen los procesos de manera adecuada, una comprensión suficiente de las nociones matemáticas implícitas en la resolución de problemas.

En todo caso, en el proceso de adquisición y consolidación del conocimiento humano es innegable la aparición y permanencia de dificultades y errores que complican el normal desarrollo de la comprensión del conocimiento. Sin embargo, en el error también hay virtud, puesto que un conocimiento defectuoso o fragmentado puede constituir la base

de la cual partir para elaborar un conocimiento mejor acabado.

Una de las explicaciones que se ofrecen entre especialistas a propósito del error tiene que ver con los estadios del desarrollo humano (semiótico, estructural y autónomo) por los que atraviesa una persona en su proceso de maduración cognitiva y que influyen inevitablemente sus sistemas de representación. En el caso de las matemáticas, Socas [30] distingue las siguientes etapas:

(a) Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética. Para entender la generalización de las relaciones y procesos se requiere que estos antes hayan sido asimilados en el contexto aritmético. (b) Errores de procedimiento. Los alumnos usan inadecuadamente fórmulas o reglas de procedimiento. (c) Errores del álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico: Ejemplo de este tipo de errores son el sentido del signo “=” en álgebra y la sustitución formal. Los errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales tienen distinta naturaleza: faltas de concentración (excesiva confianza), bloqueos olvidos, etc. (p. 34)

Cuando un estudiante elabora significados de los objetos algebraicos para lograr un nivel de comprensión se relacionan los diferentes elementos del modelo anteriormente mencionado. Frecuentemente los errores se presentan al manipular una representación dentro de un sistema de representaciones, que habitualmente es el algebraico. También se puede presentar cuando hay una elección incorrecta de un sistema semiótico al solucionar un problema matemático. En este sentido, Duval [41] señala que

muchas de las dificultades encontradas por los estudiantes en diferentes niveles del currículo pueden ser descritas y explicadas como una falta de coordinación de registros de representación. Además, la construcción inadecuada de un concepto se puede deber a una carencia de articulación entre diferentes registros semióticos de representación. (p. 52)

La falta de conocimientos base, la poca apropiación de conceptos y otras muchas y diversas situaciones sirven de base para caracterizar los errores. Para esta investigación se asume la posición de Socas [30] (1997), para quien “El error debe ser considerado como la presencia en el estudiante de un esquema cognitivo inadecuado y no solo la consecuencia de una falta específica de conocimiento o una distracción”. De este modo, quedan establecidos para el autor los dos principales orígenes del error: la complejidad de los objetos matemáticos y los procesos de pensamiento que implica su comprensión. A ellos se suma un tercer eje, relacionado con las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas. Por ello, según este autor, para analizar el origen del error han de considerarse tres ejes en los cuales se pueden situar los cometidos por los estudiantes desde su origen en actitudes afectivas y emocionales.

En torno a la categorización del error, Radatz [42] señala que la aritmética y el conocimiento numérico predominan en la mayoría de los estudios relacionados con los errores en matemáticas, por lo cual propone, a partir del procesamiento de la información, las siguientes categorías: 1. Errores debidos a dificultades de lenguaje. 2. Errores debidos a dificultades para obtener información espacial. 3. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. 4.

Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento, que generalmente son causados por la incapacidad del pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas. 5. Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes, que surgen con frecuencia por aplicar con éxito reglas o estrategias similares en áreas de contenidos diferentes.

Donde la categorización presentada por Radatz [42] abarca desde las diferentes ópticas que se le pueden dar a los procesos matemáticos que se deben desarrollar alrededor del razonamiento cuantitativo, el cual abarca todos los tipos de pensamientos matemáticos y las diferentes representaciones semióticas de las situaciones en contexto.

En este mismo sentido, pero solo para el aprendizaje del álgebra, Palarea [43] propone la siguiente organización de errores: 1. Errores en álgebra que tienen su origen en la aritmética. Y dentro de estos se distinguen: errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva, errores relativos al uso de recíprocos y errores de cancelación. 2. Errores en álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico.

La anterior organización de errores, dado que se basa en el aprendizaje del álgebra, enfoca su atención sobre los procesos matemáticos requeridos para operar correctamente objetos matemáticos. Este tipo de error, frecuente entre los estudiantes de educación básica y media, son menos numerosos en la educación superior.

## DIFICULTADES

Socas [30] considera que las dificultades de aprendizaje de las matemáticas tienen orígenes diferentes y que generalmente se pueden situar en lo que el autor denomina microsistema educativo, donde se interrelacionan el estudiante, la materia, el profesor y la institución educativa. Es en ese ámbito, en efecto, donde se generan, vinculan y fortalecen de manera compleja las

dificultades, que se reflejan en la práctica como los obstáculos y se exteriorizan en el desempeño de los estudiantes en forma de errores. Estas deficiencias son consideradas representaciones cognitivas inadecuadas, resultado de carencias determinadas de conocimiento o de despistes propios de los estudiantes.

Según Socas [30], cuatro componentes básicos divergen como productores de problemas en el currículo de matemáticas:

las destrezas necesarias para desarrollar capacidades matemáticas que definen la competencia de un alumno en matemáticas, la necesidad de contenidos anteriores, el nivel de abstracción requerido y la naturaleza lógica de las matemáticas escolares. De forma detallada, éstas pueden ser organizadas de la siguiente forma: 1) Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas. 2) Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático. 3) Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas. 4) Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos. 5) Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas. Las dos primeras se relacionan con la propia disciplina, la tercera con los procesos de enseñanza, la cuarta con los procesos cognitivos de los alumnos y la quinta con el terreno afectivo. (p. 32).

Socas [30] también suministra información sobre algunas de particularidades de los problemas que presentan los estudiantes, como por ejemplo, que un obstáculo es un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento. Este conocimiento tiene un dominio de eficacia y se

utiliza para producir respuestas adaptadas a un cierto contexto. Cuando este conocimiento se utiliza fuera de su contexto, genera respuestas inadecuadas, incluso incorrectas. Es resistente y resultará más resistente cuanto mejor adquirido esté o cuanto más haya demostrado su eficacia y su potencia en el anterior dominio de validez. Después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándose esporádicamente.

Estas dificultades se pueden presentar de manera individual o interrelacionadas, constituyendo tramas complejas que se fortalecen y sintetizan como impedimentos en la práctica del conocimiento matemático y que se materializan como errores. Cuando los estudiantes afrontan conocimientos novedosos que exigen el reto de retomar los conceptos previos adquiridos y elaborar nuevas estructuras, surgen entonces los errores en su desempeño.

## RAZONAMIENTO CUANTITATIVO

Dado que el proyecto se enmarca en el razonamiento cuantitativo desde la óptica de la Pruebas Saber Pro, se asume la definición elegida por el ICFES para este término en las guías de orientación, en la que se expresa como los elementos matemáticos que permiten a un ciudadano participar activamente en el contexto en el que se desarrolle, sea este familiar, personal, laboral o científico. En este sentido, resulta necesario considerar las competencias que se deben desarrollar en torno a los conocimientos matemáticos, cuales son la interpretación y representación, la formulación y ejecución y la argumentación.

El razonamiento cuantitativo es evaluado desde tres grupos de temas matemáticos: estadística, geometría y álgebra y cálculo. Es de resaltar que los contenidos evaluados en estos grupos de temas son todos desarrollados al nivel de la educación básica y media.

## METODOLOGÍA

La investigación propuesta es de carácter descriptivo en tanto que procura identificar y clasificar los errores y dificultades en torno al razonamiento cuantitativo que presentan los estudiantes de primer año de las carreras de ingenierías de la UFPS. La consecución de los datos se ha logrado mediante el diseño y aplicación del instrumento que se describe a continuación.

La base inicial del cuestionario está constituida por ítems de la Pruebas Saber Pro que el ICFES ha publicado durante los años 2014 y 2018. De este conjunto, se analizaron las preguntas que forman el cuerpo del test de razonamiento cuantitativo y se seleccionan 35. Las preguntas son de selección única con cuatro opciones de respuesta (A, B, C, D). Puesto que ya han sido aplicadas por la institución en evaluaciones previas, cada uno de los ítems ya ha superado las pruebas de validez y confiabilidad respectiva.

Con el fin de mantener los esquemas utilizados en este tipo de pruebas, el 49% del total de los ítems corresponde al módulo de contenido estadístico, las preguntas que se relacionan con el área de geometría son el 11% del total de las preguntas y el restante conciernen a álgebra y cálculo. Desde la perspectiva de explorar en los estudiantes las competencias interpretativa, argumentativa y formulación y ejecución, se representan en porcentajes similares.

Una vez seleccionado el material, se procedió al diseño de la prueba, procurando que el documento resultante facilitara tanto su lectura como su resolución. Con esta prueba inicial se llevó a cabo un ensayo piloto con 25 estudiantes cursantes del segundo semestre del programa de Licenciatura en Matemáticas de la UFPS. En el caso de las ingenierías de la UFPS los estudiantes de segundo semestre ya han cursado las asignaturas de Cálculo Diferencial o Cálculo Integral. En cuanto al tiempo de

aplicación, el ICFES evalúa el módulo de razonamiento cuantitativo mediante 35 pruebas que se deben responder en 55 minutos para 35 preguntas. Sin embargo, para la prueba piloto se otorgaron a los estudiantes 2 horas, ya que el interés de la investigación no se centra en la correcta selección de la respuesta sino en los procesos. En efecto, para que se hagan evidentes los errores y dificultades es necesario que los estudiantes puedan desarrollar con holgura de tiempo los procesos requeridos antes de seleccionar su respuesta. De este modo se evitan respuestas al azar.

De las 35 preguntas iniciales, los estudiantes contestaron en promedio 21. Las razones que expresaron fueron la insuficiencia de tiempo o incomprensión del enunciado. Puesto que el propósito de la investigación se relaciona con el establecimiento y clasificación de dificultades y errores en el proceso de construcción de las respuestas, los ítems sin contestación no ofrecen información pertinente y resultan en consecuencia irrelevantes. De este modo, el instrumento se reestructura a 21 preguntas, 13 de las cuales (62%) recibieron mayoritariamente respuestas equívocas en la aplicación piloto. En cuanto a las áreas de conocimiento, 11 preguntas (49%) se vinculan la estadística, 8 conciernen al álgebra y al cálculo (40%) y 2 se refieren a la geometría (11%). En lo que respecta a la clasificación de las competencias (interpretativa, formulación y ejecución y argumentativa), la distribución resultó proporcional, con 7 preguntas en cada caso.

En la aplicación piloto se indicó a los estudiantes que además de seleccionar una respuesta debían realizar el proceso necesario para la obtención del resultado; ello, con el propósito de la investigación de inventariar y categorizar los errores y dificultades que los estudiantes presentan en torno al razonamiento cuantitativo.

En consecuencia, el paso siguiente en el desarrollo de la investigación es la revisión

de resultados, el análisis de reactivos, la construcción de categorías y la clasificación de errores cometidos y las dificultades presentadas por los estudiantes respecto al razonamiento cuantitativo.

## RESULTADOS

### Resultados generales.

Para la aplicación fueron seleccionados los estudiantes de primer año de Ingeniería Ambiental matriculados en las asignaturas de Matemáticas I o Matemáticas II, cada una con dos grupos: A y B. Se promueve la participación voluntaria y se logra que 80 estudiantes participen del experimento. 46% de quienes desarrollan la prueba cursan la asignatura Matemáticas I y el 54% restante Matemáticas II. Algunos de los estudiantes que presentaron la prueba han matriculado la asignatura más de una vez. Aunque el género no se ha considerado en este estudio como variable interviniente, se acota que el 58,8% de los estudiantes participantes son de género femenino y el género masculino está representado por el 41,3%.

Cuando se comparan los resultados de la prueba de razonamiento cuantitativo de acuerdo con la asignatura se observa que el promedio de errores de los estudiantes que cursan Matemáticas I es de 62,4%, siendo superior en un 9% a los evaluados del curso de Matemáticas II. Existen comportamientos similares en el 33% de los ítems, (P2, P5, P6, P7, P13, P17 y P21). En el 38% de las preguntas el porcentaje de respuestas erróneas en el curso de Matemáticas I es mayor que los de matemáticas II, con un porcentaje por encima del 15%. Solo en el 19% de los ítems evaluados los estudiantes del segundo semestre obtuvieron respuestas erróneas superiores a los del semestre anterior (Ver tabla 1).

**Tabla 1.** Porcentaje de errores en cada ítem por asignatura

Pregunta	Matemática I	Matemática II	Total
1	45,9%	39,5%	42,5%
2	10,8%	7,0%	8,8%
3	83,8%	60,5%	71,3%
4	75,7%	58,1%	66,3%
5	97,3%	97,7%	97,5%
6	40,5%	44,2%	42,5%
7	59,5%	58,1%	58,8%
8	56,8%	27,9%	41,3%
9	62,2%	41,9%	51,3%
10	59,5%	44,2%	51,3%
11	73,0%	58,1%	65,0%
12	75,7%	58,1%	66,3%
13	35,1%	34,9%	35,0%
14	78,4%	69,8%	73,8%
15	70,3%	53,5%	61,3%
16	94,6%	88,4%	91,3%
17	64,9%	65,1%	65,0%
18	62,2%	79,1%	71,3%
19	73,0%	69,8%	71,3%
20	32,4%	9,3%	20,0%
21	59,5%	55,8%	57,5%
Promedio	62,4%	53,4%	57,6%

Fuente: Autor

Se debe centra gran atención en la pregunta P18 correspondiente al tema álgebra y cálculo de la competencia formulación y ejecución, dado que existe una diferencia del 16,9% entre los dos semestres, con mayor dominio del tema por parte de los estudiantes del semestre inferior, que tiene que ver con relacionar dos variables y determinar proporciones. En las preguntas P3, P4, P8, P9, P10, P12, P15 los estudiantes de Matemáticas I obtuvieron porcentajes mayores del 15% en errores en comparación con los de Matemáticas II.

En general, el promedio de respuestas correctas es solo del 42,5%, lo que implica que en más de la mitad de los casos los estudiantes cometen errores. Si los estudiantes persisten con estas falencias al momento de presentar las Pruebas saber Pro, sus resultados serán muy pobres,

pues entrarían en el rango del 40% al 70% de respuestas erróneas.

Los ítems en los que se presentan respuestas incorrectas superiores al 90% son la pregunta P5, relacionada con el tema de estadística de la competencia interpretativa, y la pregunta P16, del tema álgebra y cálculo de las competencias argumentativa. Las preguntas P2, P20 y P13 son las que presentan porcentajes de respuestas erróneas inferiores al 40% y están relacionadas con los temas de álgebra y cálculo, geometría y estadística; las dos primeras pertenecientes a la competencia interpretativa, la pregunta P2, que fue la de menor porcentaje de errores acumuló, corresponde a competencia formulación y ejecución. Estos resultados se pueden visualizar en la tabla 2.

**Tabla 2** Preguntas que polarizan el porcentaje de respuestas erróneas

Pregunta	Tema	Competencia	Afirmación	% de respuestas erróneas
5	Estadística	Interpretación	A3	97,5
16	Álgebra y cálculo	Argumentación	A1	91,2
13	Estadística	Interpretación	A2	35,0
20	Geometría	Interpretación	A3	20,0
2	Álgebra y Cálculo	Formulación y ejecución	A2	3,8
		Total		57,3

Fuente: Autor

### RESULTADOS EN RELACIÓN CON LAS AFIRMACIONES DEL ICSES.

Como se ha señalado con anterioridad, el instrumento aplicado posee características similares a la Prueba Saber Pro, donde la respuesta es de selección única, pero a diferencia de esa prueba, en este caso se solicita a los estudiantes desarrollar el respectivo procedimiento que justifique la respuesta seleccionada. En la exposición que sigue, los resultados se agrupan según la afirmación relacionada con el razonamiento cuantitativo referente al promedio de respuesta incorrectas de los estudiantes presentada por el ICSES en sus informes a partir del 2016.

Las preguntas P1, P3, P4, P11, P16 y P17 corresponden a la afirmación número 1, de acuerdo con la cual el estudiante “valida procedimientos y estrategias matemáticas utilizadas para dar solución a problemas”. La proporción de respuestas incorrectas oscila entre el 42,5 y el 91,2%, por lo que el promedio de errores en lo referente a esta afirmación es de 66,9%. Cabe resaltar que en cinco de las seis preguntas de esta categoría el porcentaje de equivocaciones es superior al 50%.

El instrumento contiene siete preguntas (P2, P6, P10, P13, P15, P19 y P21) relacionadas con la afirmación 2, según la cual el estudiante

“frente a un problema que involucre información cuantitativa, plantea e implementa estrategias que lleven a soluciones adecuadas”.

El promedio de respuestas incorrectas alcanza aquí el 46,1%. En el 57% de las preguntas porcentajes el porcentaje de errores supera el 50% de las respuestas dadas. El menor valor de respuestas incorrectas es del 3,8% correspondiente a la pregunta 2 y el mayor es de 71,2%, dadas a la pregunta 19.

En relación con la afirmación 3, que señala que el estudiante “comprende y transforma la información cuantitativa y esquemática presentada en distintos formatos”, en el 75% de las ocho preguntas concernientes (P5, P7, P8, P9, P12, P14, P18 y P20) los participantes presentan porcentajes de respuestas incorrectas superiores al 50%. El intervalo, que es más amplio que en la afirmación precedente, va de 20 a 97,5 y el promedio de respuestas erróneas se sitúa en el 60%

### RESULTADOS POR ÍTEMS.

Puesto que cada pregunta tiene cuatro opciones de respuesta y solo una de ellas es correcta, la selección de cualquiera de las otras opciones evidencia algún tipo de error por parte del estudiante en el desarrollo del problema.

En la primera pregunta se presenta un diagrama de pastel con la información de la edad de la población de cierto país, ítem relacionado con el tema de estadística, en el cual se desarrolla la competencia argumentativa. El 57,5% de los estudiantes acertó con la respuesta correcta, el 21,3% interpretó incorrectamente el enunciado (E1) e igual porcentaje de estudiantes explicó erróneamente el gráfico (E2).

La segunda pregunta presenta la información de un sistema de transporte a través de una tabla. Se pide determinar una expresión matemática que represente la capacidad de pasajeros que pueden ser transportados por la totalidad de los buses, con lo cual se explora el desarrollo de la competencia formulación y ejecución correspondiente al tema de álgebra y cálculo. En esta pregunta se encuentra el más alto porcentaje de aciertos de todos los ítems evaluados. Los errores identificados se relacionan con la comprensión incorrecta de la información (E3) y las dificultades en el dominio de propiedades en operaciones matemáticas (E4), aunque en mínimos porcentajes.

Para responder el enunciado presentado en la tercera pregunta, el estudiante debe justificar el proceso realizado por el capitán de un barco. Esta pregunta requiere la aplicación de la competencia argumentativa dentro de los procesos de álgebra y cálculo. De acuerdo con los resultados, el 28,8% de los estudiantes aciertan con la respuesta correcta y los restantes revelan errores en la interpretación del enunciado (30%) y en los procesos de factorización (37,6%).

La pregunta 4 evalúa el tema de estadística y la competencia argumentativa. Para ello se presenta un gráfico de acumulados de ejecución del presupuesto en el sector salud. Un 33,8% manifiestan el dominio tanto del tema como de la competencia por cuanto aciertan en la respuesta correcta. Sin embargo, el 22,5% ignoran la fecha cuestionada en la pregunta, el 11,3% comparan la ejecución del 2013 con

el promedio de un periodo de tiempo y un 30% no identifica que la gráfica corresponde a los acumulados de ejecución de cada mes.

Las respuestas a la pregunta 5, que se relaciona igual que la pregunta anterior con el tema de estadística. Este ítem destaca porque acumula el mayor porcentaje de equivocación, que alcanza el 97,5%, entre los estudiantes. Las opciones de respuesta desplegadas son diagramas de barras horizontales en los que se evidencian deficiencias en la competencia interpretativa, ya que no se tiene en cuenta que el gráfico del enunciado hace referencia a valores acumulados.

En la pregunta 6 se aprovecha la información presentada en la pregunta 4, correspondiente al tema de estadística. La respuesta apropiada requiere esta vez el dominio de la competencia formulación y ejecución. Aquí, 57,5% de los evaluados contestaron acertadamente y el 23,8% presentan deficiencias para la interpretación adecuada de los gráficos, el 11,3% comprenden incorrectamente el enunciado y el 7,5% restante ignora parcialmente la información.

Álgebra y cálculo es el tema desarrollado en la pregunta 7, que se corresponde con la interpretación de un gráfico propuesto para calcular cierta cantidad de dinero por parte del Departamento de Hacienda. En este ítem, el 41,3% de los estudiantes acertaron con la correcta comprensión del esquema, el 1,3 omitieron su respuesta y el 57,5% restante marcaron opciones erróneas, pues ignoraron la inversión, la retención, el dinero invertido y/o los intereses necesarios para determinar el dinero resultante.

La octava pregunta corresponde a la competencia de interpretación y en ella se presenta un gráfico con los resultados hipotéticos de torneos de cinco jugadores de tenis. El tema, en consecuencia, concierne a la estadística. En este ítem, el 5% de los estudiantes se abstiene de marcar algunas

de las opciones para respuesta, el 36,3% de los evaluados presenta errores de interpretación del gráfico. El 58,8% que resta ha seleccionado la opción correcta.

Con la misma información del gráfico anterior se presenta la novena pregunta del tema estadística, para cuya respuesta es necesaria la competencia de interpretación. La tarea consiste en promediar los torneros jugados en cancha dura de los cinco jugadores y quienes la realizan adecuadamente alcanzan el 48,8%. El 18,8% cometió errores al determinar el promedio y 30% interpretó incorrectamente el gráfico presentado.

El enunciado y la tabla de información de la pregunta 10 hacen referencia al subsidio familiar de vivienda que puede adquirir un trabajador según sus ingresos en salarios mínimos legales vigentes. El tema, en consecuencia, corresponde al área de álgebra y cálculo. El 48,8% de los participantes demuestra el dominio de la competencia de formulación y ejecución en cuanto que su respuesta es acertada. Un 3,8% no marcó ninguna de las opciones de respuesta y el 47,5% erró, ya que debía construir una ecuación para determinar el valor de crédito y en su lugar realizaron procesos como sumar el valor de la vivienda, el subsidio, los ingresos y/o los ahorros.

El tema de estadística continúa en la pregunta 11 con la misma información de la pregunta anterior. Esta vez, sin embargo, se presenta un gráfico de ingresos vs subsidios en salarios mínimos legales vigentes, y se pide al estudiante argumentar la inconsistencia presentada en el gráfico. El porcentaje de acierto alcanza el 35%. Los errores vienen dados en el 18,8% por generalizar una regla sin tener en cuenta el contexto y el 8,8% presenta fallas en la percepción de la información.

La pregunta 12 corresponde al tema álgebra y cálculo y a la competencia interpretación.

Con la información presentada en la pregunta 10, el estudiante debe determinar el subsidio a obtener de acuerdo a las condiciones dadas en el enunciado. El 33,8% de los evaluados responden correctamente. Al 57,5% se le dificulta determinar el número de veces en relación a otra condición y el 8,8% omite la respuesta y no marcan ninguna de las opciones propuestas.

La tabla de contingencia de doble entrada presentada en la pregunta 13 evalúa el tema de estadística, para lo que se requiere de la competencia de interpretación. Aquí, el 32,5% presenta equivocaciones al determinar la probabilidad de un suceso, pero el 65% de los evaluados obtiene una respuesta correcta mediante un procedimiento adecuado.

La pregunta 14 presenta una tabla con información de una investigación sobre la supervivencia de dos tipos de truchas durante seis años por lo que el estudiante debe Interpretar tanto el enunciado como la tabla, en la cual aciertan un 26,3% en esta competencia, un 2,5% omiten respuesta, un 42,5% interpretan erradamente el enunciado y un 28,8% se equivocan al interpretar la tabla presentada. Esta pregunta corresponde al tema de Estadística.

Las preguntas 15 hasta la 19 se basan en una gráfica que representa el número de habitantes en un país en cuatro años diferentes y cuatro graficas de la población correspondientes a un número igual de regiones del país en los mismos años. La pregunta 15 atañe a la estadística y presenta cuatro diagramas circulares del presupuesto del país por regiones. Para la resolución del problema es necesaria la competencia de formulación y ejecución. En las respuestas ha habido un 58,8% de respuestas erróneas, pues quienes las dieron ignoraron de la información dada la proporción que representa cada región y la región faltante. Solo el 38,8% de los evaluados acierta.

Con la información dada en la pregunta anterior, el enunciado de la 16 explora el tema de álgebra y cálculo, en la que se debe generar una estrategia para trasladar a otras regiones una población que ha sido víctima de un fenómeno natural. La competencia necesaria para la respuesta es la de la argumentación. Se evidencia gran dificultad en este ítem ya que apenas un 8,8% de los evaluados acierta con la respuesta correcta, un 5% se exime de responder, el 47,5% no tiene en cuenta el tope máximo posible de la región y el 38,8% determina incorrectamente el valor del porcentaje.

La competencia argumentativa es necesaria para responder la pregunta 17, que se enmarca en el tema de la estadística. Aquí se solicita graficar, pero en las opciones de respuesta se dan una serie de limitantes para realizar la tarea. En las respuestas de los estudiantes evaluados se encuentra una gran dificultad para relacionar la información con el gráfico presentado y un 5% de no responden ninguna de las opciones dadas. Solo el 35% acierta con la respuesta y las demás elecciones resultan equivocadas.

Para dar respuesta a la pregunta 18 el estudiante debe interpretar los gráficos presentados y calcular unas determinadas relaciones. Los resultados revelan un 68,7% de error al calcular las proporciones y razones necesarias para seleccionar la opción correcta. El tema correspondiente es el de álgebra y cálculo.

El tema de la pregunta 19 corresponde al tema álgebra y cálculo, para cuya respuesta es necesario demostrar la competencia de formulación y ejecución a través de la expresión de una serie de operaciones. En efecto, se pide calcular el porcentaje de mujeres de un país conociendo el género contrario. El 35% evade el procedimiento de forma directa, el 30% asume que dividir entre cuatro es lo mismo que obtener un 40% y solo un 28,8% tiene en cuenta las dos posibles opciones correctas para realizar el procedimiento solicitado.

Las preguntas 20 y 21 corresponden al tema de geometría. En ellas se ofrece un mapa de la vista aérea de las calles de una parte de una ciudad, se marcan tres puntos (A, B, C) y la medida de dos segmentos sobre el mapa.

Para la primera pregunta de este par es necesario que el estudiante interprete el gráfico del enunciado y los gráficos de las opciones de respuesta y determine las que son de igual longitud. El 80% de los estudiantes acertaron en la respuesta correcta, el 8,8% solo tienen en cuenta una opción de respuesta y el 3,8% no tienen en cuenta el valor de cada segmento

En la pregunta 21, se pide establecer un camino con los mismos datos de la anterior. La competencia en juego es la de formulación y ejecución. El 42,5% de los participantes respondieron correctamente y el 42,6% asocian incorrectamente el camino bien por exceso o por defecto

## DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

394

Luego de aplicar el instrumento y analizar los resultados se arriba a la conclusión de que los estudiantes evaluados presentan errores significativos relacionados con el razonamiento cuantitativo. Respecto de las competencias analizadas por medio de la prueba, se evidencia que en la argumentación el 66,9% de los estudiantes presenta deficiencias y en un porcentaje superior al 70% se trata de quienes cursan la asignatura de Matemáticas I. Las otras competencias valoradas durante el estudio, esto es: interpretación y formulación y ejecución, si bien con proporciones menores de errores, también se encuentran en niveles deficitarios. En efecto, entre quienes cursan el primer semestre de la carrera, el promedio de error de tres competencias estuvo por encima del 50%.

Entre los estudiantes de Matemáticas II, quienes para la fecha de presentación de la prueba ya habían desarrollado en su totalidad dos cursos

de matemáticas, el mayor porcentaje de error estuvo en la competencia argumentativa. Pero solo la competencia de formulación y ejecución aglutinó una proporción de equívocos por debajo del 50%.

Con respecto a los temas evaluados, a saber, álgebra y cálculo, estadística y geometría, los estudiantes de Matemáticas I obtuvieron mayor porcentaje de errores. La mayor dificultad se presenta en los relacionados con el álgebra y el cálculo, con un promedio del 61,3% de errores, seguidos por los de estadística, con un 58,3% de equivocación. En los ítems relacionados con temas de geometría hubo en ambos cursos una cantidad mayor de soluciones apropiadas y los desaciertos se recuentan en menos de la mitad de las respuestas.

Dado que el propósito del estudio no ha sido solamente el recuento y descripción del error final de respuesta, sino además la caracterización y análisis del proceso que conduce hasta él, se han constatado que en la literatura existente la clasificación de Radatz (1980) es la que permite establecer con mayor precisión una categorización de los errores que se presentan en los procesos realizados por los estudiantes evaluados en la prueba de razonamiento cuantitativo. Esta clasificación consta de cinco categorías a partir del procesamiento de la información establecida. Entre ellas, la que ha resultado más significativa para explicar los resultados de este estudio ha sido la categoría denominada errores debido a dificultades para obtener información espacial. En efecto, los procesos relacionados con la información suministrada a través de imágenes espaciales o visuales (donde debe realizarse el análisis y la percepción de las características de la información) se concentra el 30,76% de frecuencia de dificultades y el mayor promedio de error en comparación con los demás errores. Tanto es así, que la pregunta 5, en cuyo enunciado se encuentra un gráfico y las opciones

de respuesta son gráficas de barras, el 95,1% de los estudiantes erraron, pues no observaron con detenimiento la información suministrada ni los valores que representan todas las barras de las respuestas.

Los errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos se presentan en un 25,64% de las respuestas. Este tipo de equívocos se evidencia en el dominio deficiente de razones, proporciones, relaciones entre valores, propiedades en operaciones matemáticas básicas, conceptos de probabilidad, algoritmos, porcentajes y factorización. El máximo porcentaje de errores de este tipo se da en la pregunta 18, con un 68,8% de equivocación por parte de los estudiantes al determinar el número de veces que ocurría una cantidad en relación a otra presentada en un gráfico.

En un 23,08% se presentaron los errores debido a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento, lo cual pone en evidencia la falta de flexibilidad que tienen los estudiantes para codificar y decodificar una situación que se asemeje a otra con características similares. Las respuestas al ítem 7 presentan un 57,6% de error de esta categoría; de ellos, el 36,3% corresponde a errores de interferencia al determinar el dinero total a obtener luego de ser efectuada una retención y un 21,3% a un error por percepción, pues ignora la inversión realizada. Dentro de esta misma categoría presentada por Radatz [42], están los errores de asociación y errores de asimilación, en los que se producen interacciones incorrectas entre elementos singulares y falta de percepción.

Respecto a la categoría errores debido a dificultades de lenguaje, la concentración de equívocos en la prueba concentra en un 17,95% los errores relacionados con conceptos, símbolos y vocabulario. En la resolución de problemas que deben ser transformados a un lenguaje matemático, cabe resaltar la pregunta

10, donde el 47,6% de los errores pertenecen a esta categoría

Los errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes son los que menos aparecieron, con solo un 2.56% de las faltas cometidas. Estos errores se producen cuando se realizan razonamientos análogos que no funcionan en la situación evaluada.

Para la explicación de estos resultados conviene recurrir a la opinión de los expertos. Socas [30], por ejemplo, señala que las dificultades se pueden categorizar en cinco grupos, referidas a la complejidad de la matemática y sus objetos conceptuales, la complejidad de los procesos de pensamiento matemático, los procesos de enseñanza de la disciplina, los procesos de desarrollo cognitivos de los estudiantes y actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas. Los dos primeros guardan una estrecha relación y en ellos se concentró la investigación; en efecto, se trata del tipo de dificultades detectadas a través de la prueba de razonamiento cuantitativo realizada a los estudiantes.

En cuanto a las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos, se evidencia en los resultados de la prueba que los participantes tropiezan con obstáculos al momento de establecer relaciones entre dos o más cantidades en las que se debe determinar el número de veces que un suceso ocurre respecto a otro, establecer las fracciones dentro de una situación en contexto, calcular porcentajes, operar con las propiedades de las operaciones básicas y su orden jerárquico y factorizar elementos comunes en expresiones matemáticas.

Con respecto a las dificultades asociadas al proceso de pensamiento matemático, de nuevo los estudiantes manifiestan insuficiencia de habilidades cognitivas específicas en los modos de pensamiento, sobresaliendo en los

evaluados la dificultad de la trasposición de la información en forma gráfica o espacial a las representaciones matemáticas en general. Estos resultados coinciden con las observaciones expuestas en su momento por Duval [41], que señalaba que la falta de coordinación de registros de representación evidencia la carencia de articulación entre los diferentes registros semióticos de representación, que es una de las formas en las que se demuestra la comprensión verdadera de los objetos y relaciones matemáticas.

En razón de lo anterior, se precisa prestar gran atención en el manejo de las representaciones gráficas de variadas situaciones puesto que los errores más frecuentes están relacionados con tales representaciones. Las referencias a todo tipo de gráficas tanto estadísticas, matemáticas o simples representaciones de situaciones constituyen un valioso recurso sobre este particular, pues facilitan los procesos de interpretación para luego formular y argumentar adecuadamente en función de estas.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES). (2016). Guía de orientación. Módulo de razonamiento cuantitativo. Saber T&T 2016-2. <https://www.icfes.gov.co/documents/20143/178043/Guia%20de%20orientacion%20modulo%20razonamiento%20cuantitativo%20saber%20tyt%202016%202.pdf> [Accedido: 30-jun-2020].
- [2] Y.P. Garrido y M.L.M. Leyva, Reflexiones sobre la calidad del aprendizaje y de las competencias matemáticas. Revista iberoamericana de Educación, vol. 41, n° ), pp. 1-15, 2006.

- [3] Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE), "Informe PISA 2009: Lo que los estudiantes saben y pueden hacer: Rendimiento de los estudiantes en lectura, matemáticas y ciencias", Madrid: Santillana, 2009.
- [4] B.G. Quiroga, A. Coronado y L.M. Quintana, "Formación y desarrollo de competencias matemáticas: una perspectiva teórica en la didáctica de las matemáticas", Educación y Pedagogía, vol. 59, pp. 159-175, 2011.
- [5] R: García, "Diseño y validación de un instrumento de evaluación de la competencia matemática. Rendimiento matemático de los alumnos más capaces", tesis doctoral, Madrid: UNED, 2014.
- [6] R. García y C. Jiménez, "Diagnóstico de la competencia matemática de los alumnos más capaces", Revista de Investigación Educativa, vol. 34, n° 1, pp. 17, 205-219, 2016.
- [7] R. García, L.S. Almeida y F. Viseu, "El rendimiento matemático excelente en las evaluaciones PISA: Resultados para España y Portugal", Revista de Estudios e Investigación en Psicología y Educación, n°1, pp. 303-308, 2017.
- [8] J.C. León, J. H. Martínez y J.A. Coral, J. A. "Determinantes del desempeño en la prueba específica de pensamiento científico en el componente de matemáticas y estadística", En E. Serna, (Ed.), "Revolución en la formación y la capacitación para el siglo XXI" vol 1, pp. 312-323. Medellín: Instituto Antioqueño de Investigación, 2019.
- [9] M. Socas y M. Palarea, "Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar", Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, vol 14, pp. 7-24, 1997.
- [10] C. Kieran, "Research on the Learning and Teaching of Algebra: A Broadening of Sources of Meaning". En A. Gutiérrez y P. Boero, "Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future", pp. 11-49, Rotterdam: Sense Publishers, 2006.
- [11] A. Posso, J. Gómez y V. Uzuriaga, "Dificultades que aparecen en el proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática al pasar del bachillerato a la universidad"; Scientia et Technica, vol. 13, n° 34, pp. 495-500, 2007.
- [12] G. Soler Rodríguez, C. Duardo Monteagudo y N. Puig Reyes, "Factores educativos que inciden en el aprendizaje de los contenidos matemáticos en la Universidad de Ciencias Pedagógicas 'Félix Varela Morales'", Revista Electrónica Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, vol. 11, n°4, pp. 129-153, 2013.
- [13] H. Putu, "The Effect of Open-Ended Approach Towards Students' Mathematical Reasoning", Journal of Physics: Conference Series, vol. 1028, pp. 1-7, 2018.
- [14] J.D. Godino, (2002). "Perspectiva ontosemiótica de la competencia y comprensión matemática", La matemática en la sua didattica, vol. 4, pp. 434-450, 2002.

- [15] J.A. González-Pianda, J.C. Núñez, L. Álvarez, P. González, S. González-Pumariega y C. Roces, “¿Cómo explicar tanto fracaso en el aprendizaje de las matemáticas?”, *Revista Galego-Portuguesa de Psicología e Educación*, vol. 10, n° 8, pp. 349-358, 2003.
- [16] J. Orrantía, “Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva evolutiva”, *Revista Psicopedagogía*, vol. 23, n° 71, pp. 158–180, 2006.
- [17] M. Castellanos y J. Obando, “Errores y dificultades en procesos de representación: el caos de la generalización y el razonamiento algebraico”. Conferencia presentada en 10° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Pasto: Universidad de Nariño. 2009.
- [18] L. Rico, “Reivindicación del error en el aprendizaje de las matemáticas”, *Epsilon*, vol. 38, pp. 185-198, 1997.
- [19] L. Rico. Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En Kilpatrick, J.; Rico, L.; Gómez, P. (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia*. pp. 69-108. Bogotá: una empresa docente. 1995. <http://funes.uniandes.edu.co/679/1/KilpatrickEducacion.pdf>
- [20] J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico, 1998, “Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia”, Bogotá: Universidad de Los Andes - Una empresa docente, 1998.
- [21] A. Engler, M.I. Gregorini, D. Müller, S. Vrancken y M. Hecklein, “Los errores en el aprendizaje de matemática”, *Revista Premisa*, vol. 6, n° 23, pp. 23-32, 2004.
- [22] G.M. Dodera, G. Bender, E. Burroni y M. Lázaro, “Errores, actitud y desempeño matemático del ingresante universitario”, *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, vol. 38, pp. 69-84, 2014.
- [23] R. Borasi, *Reconceiving mathematics instruction: A focus on errors*. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation, 1996.
- [24] M. Pochulu, “Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad” *Colección Digital Eudoxus*, vol. 8, pp. 1-15, 2009.
- [25] M. Matz, “Towards a computational theory of algebraic competence”, *Journal of Children’s Mathematical Behavior*, vol. 3, n°1, pp. 93-166, 1980.
- [26] J. Mason, “Expressing generality and roots of algebra”, en N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), “Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching” pp. 65-86), Dordrecht: Kluwer, 1996.
- [27] B. Chahar, *Comentario sobre el trabajo: Modelos de procesos de errores de Álgebra en el Nivel Medio de M. Matz*. Massachusetts: Instituto de Tecnología de Massachusetts, 2003.
- [28] J. Star, “Re-«conceptualizing» procedural knowledge in mathematics”, *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 36, n° 5, pp. 404-411, 2005.
- [29] R.M. Ruano, M. M.; Socas y M.M. Palarea, “Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra”, *PNA*, vol. 2, n° 2, pp. 61-74, 2008.

- [30] M. Socas, "Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria", En L. Rico. La educación matemática en la enseñanza secundaria, pp. 125-154, Barcelona: Universitat de Barcelona, Instituto de Ciencias de la Educación - Horsori Editorial, 1997.
- [31] S. Del Puerto, C.L. Minnaard y S. Seminara, "Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas", Revista Iberoamericana de Educación, n° 38, pp. 1-13, 2006.
- [32] R. Borasi, "Capitalizing on errors as 'springboards for inquiry': A teaching experiment, Journal for Research in Mathematics Education, vol, 2, n° 2, pp. 166-208, 1994.
- [33] J.K. Lannin, D.D. Barker y B.E. Townsend, "How students view the general nature of their errors", Educational Studies in Mathematics, vol. 66, n°1, pp. 43-59, 2007.
- [34] M.J. González, P. Gómez, y Á.M. Restrepo, "Usos del error en la enseñanza de las matemáticas", Revista de Educación, n° 370, pp. 71-95, 2015.
- [35] J. Juidías Barroso y I.D.L.R. Rodríguez Ortiz, "Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos", Revista de Educación, vol. 342, pp. 257-286, 2007.
- [36] G. Cervantes y R. Martínez, "Sobre algunos errores comunes en desarrollos algebraicos", Zona Próxima N°. 8, pp. 34-41, 2007.
- [37] J. Soares, E. Inzunza y P. Rousseau "Resultados del examen de ubicación de matemáticas (Exumat 2.0) en la Facultad de Ingeniería Ensenada de la UABC", Ciência & Educação, vol. 15, n°1, pp. 121-128, 2009.
- [38] J. García, I. Segovia y J. Lupiáñez, "Errores y dificultades de estudiantes mexicanos de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas". En J. Lupiáñez, M. Cañadas, M. Molina, M. Palarea y A. Maz (Eds.), "Investigaciones en pensamiento numérico y algebraico e historia de la matemática y educación matemática", Granada: Universidad de Granada., pp. 145-155, 2001.
- [39] J. Barrón, O. Chávez, J. Luna, J. Estrada y E. Loera, "Errores matemáticos más comunes de los alumnos de nuevo ingreso en las clases de física y matemáticas de las carreras de ingeniería de la UACJ", CULCyT, vol. 5, n°10, pp. 21-32, 2013.
- [40] J. Lupiáñez, "Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria", tesis doctoral, Granada: Universidad de Granada, 2009.
- [41] R. Duval, "Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée", Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol. 5, pp. 37-65, 1993.
- [42] H. Radatz, "Students's Errores in the Mathemarics Leanirgn Process: A survy", Fort he Learning of Mathematics, vol.1, n°1, pp. 1-20, 1980.
- [43] M. Palarea, "La adquisición del Lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años", tesis doctoral, Santa Cruz de Tenerife: Universidad de la Laguna, 1998.