

# CARACTERIZANDO LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE FÍSICA DESDE EL ALGEBRA LINEAL Y ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

## CHARACTERIZING THE SOLVING OF PHYSICS PROBLEMS FROM LINEAR ALGEBRA AND ENGINEERING STUDENTS

Luis Fernando Mariño<sup>1</sup>

Rosa Virginia Hernández<sup>2</sup>

Víctor Julio Useche Arciniegas<sup>3</sup>

UFPS

5 7 7

### RESUMEN

La resolución de problemas de física y matemática es crucial en la formación inicial del ingeniero. Los trabajos que describen estrategias para resolver problemas de física tradicionalmente han sido caracterizados desde expertos y profesores con una vasta experiencia en el campo de la física y poco abordadas desde los datos manifestados por los estudiantes. El trabajo estuvo centrado en dar respuesta a la pregunta, ¿cómo son las estrategias para

resolver problemas de física que involucran sistemas de ecuaciones lineales, manifestadas por un grupo de estudiantes de ingeniería de sistemas?, la investigación tuvo un enfoque cualitativo, desde un estudio de caso. Como fuentes de datos, se utilizó un problema resuelto de circuitos eléctricos de un libro de texto y tres secuencias de aprendizaje. El análisis de datos se realizó utilizando los procesos de codificación abierta, axial y selectiva. Los hallazgos muestran cómo los estudiantes identificaron los elementos del circuito, hicieron afirmaciones, asignaron letras a lo desconocido, establecieron relaciones, construyeron los sistemas de ecuaciones lineales que representaban el circuito y utilizaron métodos propios del álgebra lineal para resolver sistemas de ecuaciones para luego verificar y dar significado a las respuestas halladas. Los resultados, permitieron elaborar una caracterización de las estrategias para resolver problemas de física, como un flujo de

<sup>1</sup> Doctor en Educación Matemática (Universidad Antonio Nariño, Colombia). Magister en Educación Matemática. Licenciado en Matemáticas y Computación. Profesor Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Francisco de Paula Santander (Cúcuta). Correo. fernandoml@ufps.edu.co. Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-3438-6963>

<sup>2</sup> Magister en Educación Matemática. Licenciada en Matemáticas y Computación. Profesora adscrita al Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Francisco de Paula Santander (Cúcuta). Correo. rosavirginia@ufps.edu. Orcid: [/orcid.org/0000-0002-2638-671X](https://orcid.org/0000-0002-2638-671X)

<sup>3</sup> Maestría en Física. Ingeniero Civil. Profesor adscrito al Departamento de Física de la Universidad Francisco de Paula Santander (Cúcuta). Correo. victorjulioua@ufps.edu.co. Orcid: [/orcid.org/0000-0003-0635-6676](https://orcid.org/0000-0003-0635-6676)

acciones que van desde interpretar, conjeturar, formalizar, resolver, verificar y reflexionar.

### **PALABRA CLAVE**

Resolución de problemas, Problemas de Física, Algebra Lineal, Sistemas de Ecuaciones Lineales.

### **ABSTRACT**

Solving physics and mathematics problems is crucial in the initial training of the engineer. The works that describe strategies to solve physics problems have traditionally been characterized by experts and professors with vast experience in the field of physics and little addressed from the data expressed by students. The work was focused on answering the question, how are the strategies to solve physics problems involving systems of linear equations, manifested by a group of students of systems engineering? the research had a qualitative approach, from a case study. As data sources, we used a solved problem of electrical circuits from a textbook and three learning sequences. Data analysis was performed using open, axial and selective coding processes. The findings show how the students identified the elements of the circuit, made statements, assigned letters to the unknown, established relationships, constructed the systems of linear equations that represented the circuit, and used linear algebra methods to solve systems of equations to then verify and give meaning to the answers found. The results allowed to elaborate a characterization of the strategies to solve physics problems, as a flow of actions ranging from interpreting, conjecturing, formalizing, solving, verifying and reflecting.

### **KEYWORD**

Problem Solving, Physics Problems, Linear Algebra, Systems of Linear Equations.

## **INTRODUCCIÓN**

La resolución de problemas de física y matemática es un aspecto crucial y fundamental en estudiantes que inician su formación de ingenieros. El propósito de todas las ciencias, llámense básicas, puras o aplicadas se centra en desarrollar y sistematizar conocimientos útiles para resolver diferentes tipos de problemas (Larkin y Reif, 1979). Desde la enseñanza, uno de los principales objetivos de la física y la matemática es orientar al estudiante a que genere estrategias propias para la resolución de problemas. Entre tanto, desde el aprendizaje, en los primeros años de universidad los estudiantes evidencian diversos tipos y marcadas dificultades en la resolución de problemas, tanto en física como en matemática (Taasoobshirazi y Farley, 2013; Meli, Zacharos y Koliopoulos, 2016; Elizondo Treviño, 2013).

La matemática es fundamental en la resolución de problemas de física. La matemática es el eje fundamental de la física o su columna vertebral, debido a que proporciona un lenguaje que permite expresar y representar relaciones y leyes físicas. Aunque la matemática, es un componente esencial de las ciencias de ingeniería, son más complejas de lo que parece ser, puesto que no son la simple aplicación directa de fórmulas como reglas y cálculos (Bing y Redish, 2009). Para muchos investigadores y profesores de matemáticas y física, existen diversas formas de interpretar las matemáticas en física, y los estudiantes a menudo necesitan combinar razones físicas, matemáticas y computacionales para construir, verificar y creer en los resultados que obtienen.

El constructo problema ha sido definido de diversas maneras. Para Mayer (2010), existe un problema cuando una situación está en un estado y el solucionador intenta y desea llevarla a otro estado, pero hay una serie de obstáculos, que no permiten el tránsito de un estado a otro con facilidad. Incluso, algunos investigadores

definen el término problema de una manera más informal. Por ejemplo, como una situación, en la que las personas se encuentran de repente y no saben cómo reaccionar en ese momento (Ince, 2018). Otros investigadores clasifican y tipifican los problemas de acuerdo con ciertas características específicas. En sus trabajos, Jensen, Niss y Jankvist (2017), utilizan el término, problema no formalizado para caracterizar situaciones, en que las que se utiliza el lenguaje natural para describir el problema.

La resolución de problemas ha sido caracterizada desde diferentes miradas y perspectivas. Desde la matemática, autores como Polya (1945, 1981), propone un proceso de cuatro fases para resolver un problema: entender el problema, idear un plan, llevar a cabo el plan y mirar hacia atrás. Mason, Burton y Stacey (2010) plantean las fases de entrada, ataque y revisión. Mientras que, Mayer (2010) propuso dos procesos que las denominó representación del problema y solución del problema. Desde la enseñanza tradicional de la física, quienes siguen los libros de texto, caracterizan la resolución de problemas como un procedimiento de varios pasos: a) dibujar un boceto, b) definir cantidades conocidas y desconocidas, c) seleccionar ecuaciones, d) resolver ecuaciones; y e) comprobar la respuesta (Huffman, 1997).

Jensen, Niss y Jankvist (2017), como resultado de sus investigaciones proponen un modelo didáctico para la resolución de problemas compuesto por tres etapas y dos procesos. El primer proceso es la formalización del problema, que consiste en un problema formulado física o matemáticamente. En este proceso, están inmersos los subprocesos de sistematización (elementos relevantes e irrelevantes de la situación) y traducción (expresar el problema en términos físicos o matemáticos, decidiendo variables, escribiendo ecuaciones, etc.). El segundo proceso, es la resolución del problema formalizado ya sea en dominios de la matemática

o en dominios de la física, para finalmente hallar la respuesta.

Desde otra lente, un alto porcentaje de las investigaciones que abordan la resolución de problemas de física se han realizado con diferentes participantes y perspectivas. Algunas de ellas, describen y establecen diferencias y similitudes entre las estrategias utilizadas por expertos y novatos. Otras, con estudios experimentales o cuasi experimentales miden el impacto de ciertas estrategias y el trabajo colaborativo en estudiantes y profesores de diferentes niveles educativos (Ince, 2018). En contraste a lo anterior, este reporte hace referencia a una investigación realizada en Colombia en tiempos de pandemia, ocasionada por la COVID 19; quizá en uno de los momentos más críticos por los que atraviesa el país.

Las actividades se realizaron de forma virtual, utilizando Google Meet. Las tareas propuestas en las secuencias de aprendizaje, no se centraron en presentar estrategias a los estudiantes para resolver problemas. La intención fue totalmente opuesta, se presentó a los participantes un grupo de problemas resueltos en un libro de texto para que cada participante deconstruyera o desmatematizara la solución dada por el autor y a partir de ahí construyera sus propias estrategias para resolver problemas de circuitos que involucran sistemas de ecuaciones lineales. Por tanto, el estudio responde a la pregunta de investigación: ¿cómo son las estrategias construidas por un grupo de estudiantes de ingeniería de sistemas cuando resuelven problemas de circuitos que involucran sistemas de ecuaciones lineales?

## METODOLOGÍA

Para dar respuesta a la pregunta de investigación acerca de ¿cómo son las estrategias manifestadas por los participantes?, se optó por un enfoque cualitativo, desde un estudio de caso. Esto, debido a que el trabajo

estuvo centrado en interpretar y dar sentido a las manifestaciones escritas de los participantes al momento de resolver problemas de circuitos de física, que involucraron sistemas de ecuaciones lineales y partir de allí construir las categorías y subcategorías, que permitieron caracterizar las estrategias.

## **PARTICIPANTES**

Un grupo de 32 estudiantes con edades entre 16 y 20 años, que tomaron un curso de Álgebra Lineal, en el programa de Ingeniería de Sistemas de la Universidad Francisco de Paula Santander, con sede central en la ciudad de Cúcuta (Colombia), de los cuales 3 son mujeres, se constituyeron en los participantes.

## **FUENTES DE DATOS Y ESTRATEGIA DE INVESTIGACIÓN**

Como técnica para recolectar los datos, acerca de las manifestaciones escritas de los participantes, cuando descubren y plantean estrategias para resolver problemas de física, se utilizó un problema de circuitos eléctricos, que aparece resuelto en el libro Álgebra Lineal de Koman y Hill (2006, p. 146) y tres secuencias de aprendizaje, diseñadas desde una perspectiva del constructivismo radical, con el propósito de que fuera el estudiante quien descubriera, construyera, elaborara, organizara y reorganizara su conocimiento (Von Glasersfeld, 2013).

Los problemas presentados como tareas se caracterizaron por ser cada uno de ellos, una representación gráfica de alguna situación. Las situaciones o contextos de los problemas estuvieron relacionadas, ya sea con circuitos eléctricos, o como la cantidad de agua que fluye por el acueducto o la cantidad de vehículos que entra y sale de las intersecciones de calles de una ciudad.

## **RECOLECCIÓN, ANÁLISIS DE DATOS**

La forma de comunicación, entre el profesor investigador y los participantes fue de forma sincrónica y asincrónica vía Google Meet. Los participantes resolvieron las actividades desde sus casas, en hojas de papel cuadriculado, las escanearon en formato .pdf y finalmente las subieron a una carpeta compartida en drive de Google, creada específicamente para este propósito. Para el análisis de la información se utilizaron las técnicas y procesos de codificación abierta, axial y selectiva, propios de la teoría fundamentada. Una revisión inicial de los documentos permitió seleccionar los primeros incidentes. Se denominan incidentes en el sentido, que fueron las actividades de los participantes que evidenciaron estrategias mejor elaboradas que las de sus compañeros.

El proceso de análisis inició con una revisión de cada palabra, frase, signo, símbolo, fórmula o procedimientos evidenciado en la totalidad de cada uno de los documentos y no pregunta a pregunta; esto con el propósito de poder interpretar y dar sentido a las manifestaciones escritas de cada uno de los participantes. Como resultado de esta tarea inicial, surgieron los primeros códigos o conceptos tentativos, correspondientes al proceso de codificación abierta.

Luego, a partir de un proceso de comparación y contrastación entre estos conceptos iniciales, emergieron las primeras categorías. Finalmente, luego de analizar toda la información recolectada, se elaboró la categoría central o núcleo de la teoría, haciendo uso de la codificación selectiva. Allí algunas categorías iniciales absorben a otras o viceversa, incluso unas categorías desaparecen.

### CÓDIGOS Y CATEGORÍA INICIALES

A continuación, se describe y se ejemplifica acerca de la manera, como fueron elaboradas y construidas las categorías. El proceso de codificación abierta tuvo como propósito asignar los primeros conceptos a los registros escritos manifestados por los participantes. Es relevante destacar que desde la teoría fundamentada un concepto tiene dos elementos que lo caracterizan: propiedades (describen la naturaleza del concepto) y dimensiones (rango de variabilidad de las propiedades). Por otro lado, para mantener la confidencialidad de los

participantes los documentos fueron codificados como: P1-SA1, donde P1 significa el participante 1, mientras SA1, representa la secuencia de aprendizaje 1.

Ante la cuestión 5 (en la secuencia de aprendizaje 1) que decía: estudie y analice la forma en que los autores del texto resolvieron el problema. Escriba una serie de pasos o acciones siguiendo la forma o la manera como los autores resolvieron el problema. La Figura 1, muestra las manifestaciones escritas del participante cuyo trabajo se codificó como: P1 SA1:

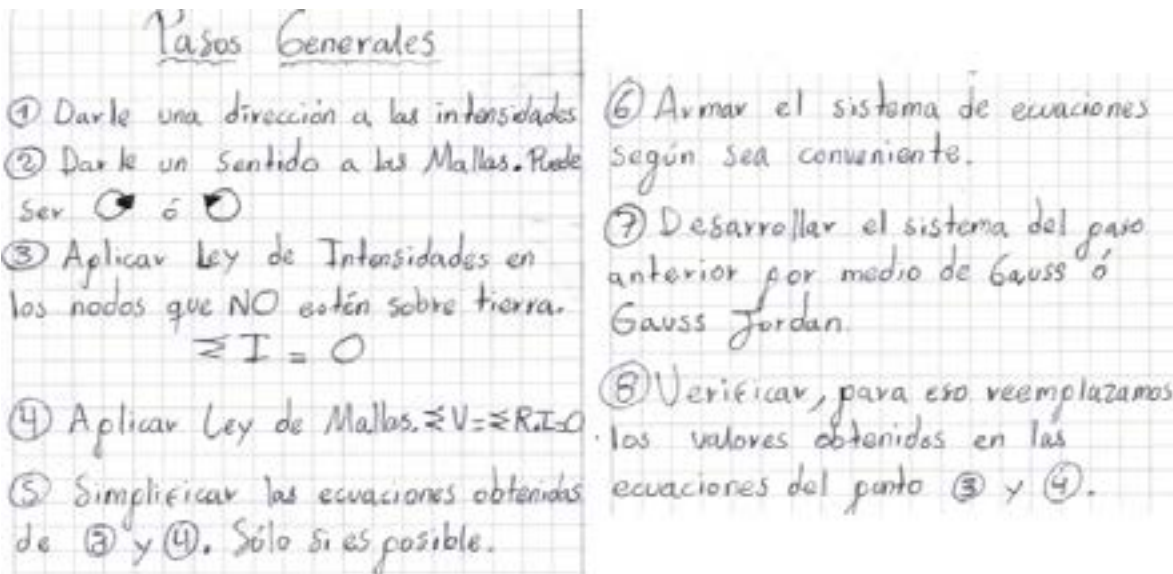


Figura 1. Pasos o acciones P1-SA1

Del análisis del trabajo del participante P1 y el de los demás estudiantes, considerados como incidentes, surgió el primer código que se denominó interpretar. A continuación, se muestran los elementos que lo caracterizan:

**Propiedades:** interpretar pasos o acciones dados por el autor del libro de texto en la solución del problema de física.

**Dimensiones:** tipos de interpretaciones dadas a la solución del autor del libro

**Descripción:** formas de interpretar los pasos o acciones dados por el autor del libro en la solución del problema.

En la cuestión 9 de la actividad SA1, se propuso a los participantes que resolvieran el mismo problema resuelto por los autores del libro, pero ahora con una variante: que hicieran la suposición donde la corriente fluyera en sentido contrario a la forma como fue resuelto en el libro. La Figura 2, evidencia el trabajo del participante E7. Las flechas rojas muestran el sentido dado al flujo de la corriente según los autores del libro,

mientras que las flechas en azul representan la variante del problema.

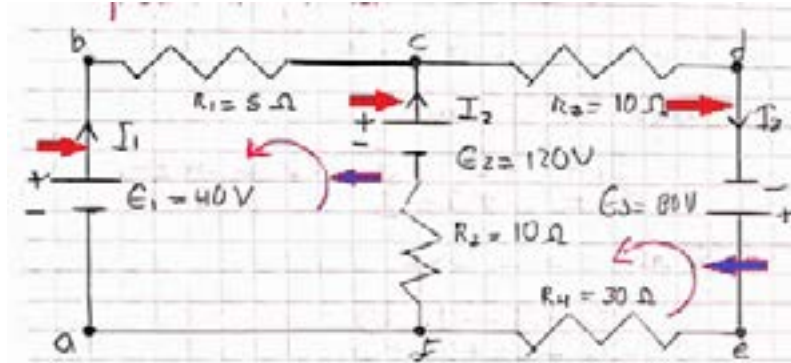


Figura 2. Categorías conjeturar, revisar y reflexionar

Esta variante o reformulación del problema lleva a los participantes a realizar suposiciones acerca de la solución del problema. Por ejemplo, si la solución sería diferente o la misma, o si surgirían las mismas ecuaciones, entre otras. Del análisis de datos y los procesos de codificación abierta y axial surgieron las categorías conjeturar, verificar y reflexionar que fueron reafirmadas con el trabajo en las demás actividades. Como se observa también, los participantes utilizan la representación gráfica del problema para asignar sentido al flujo de corriente, utilizar letras o variables para representar las cantidades desconocidas, además de signos, símbolos y las leyes físicas de Kirchoff para formular ecuaciones y sistemas de ecuaciones, como una representación algebraica y matemática del problema físico.

La Figura 3, por su parte muestra apartes (no continuos) acerca de cómo uno de los participantes utiliza procedimientos propios del método de Eliminación de Gauss para resolver el problema formalizado. En la Figura 3, en la columna de la derecha se observa como el estudiante reemplaza una de las condiciones impuestas al problema y obtiene una respuesta a la cuarta variable de -100, como lo muestran las flechas. Esto lo conduce inicialmente a una interpretación errónea, ya que interpreta el signo menos como “la falta de 100 coches”. Estas y otras acciones condujo a los participantes a conjeturar, verificar y reflexionar acerca de los resultados matemáticos obtenidos y el contexto físico del problema.

*Paso 2*

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 200 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -100 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} F_2 + F_1 \\ N_2 \end{array} \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -100 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 200 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -100 \end{array} \right)$$

$$C) \begin{cases} X_1 - 0X_3 + 0X_5 = 200 \\ X_2 - 0X_3 + 0X_5 = 200 \\ X_4 + 0X_5 = -100 \end{cases}$$

- $X_1 = 200$
- $X_2 = 200$
- $X_4 = -100$  *→ coches faltantes*

Figura 3. Resolviendo el problema formalizado

## RESULTADOS

El análisis de nueva información como resultados de las secuencias de aprendizaje dos y tres, junto a los procesos de codificación axial y selectiva, condujeron la elaboración de las categorías centrales y su densidad de relaciones. La Tabla 1, muestra estas categorías con sus subcategorías y descripción de cada una de ellas, como estrategias para resolver problemas de física.

Tabla 1. Las categorías centrales como estrategias

Categoría	Subcategorías	Descripción
Interpretar		Formas de interpretar los elementos relevantes e irrelevantes del problema
Conjeturar		Tipos de afirmaciones acerca del sentido del flujo corriente o tráfico en el circuito.
Formalizar	Asignar	Tipos de letras, signos, símbolos, expresiones matemáticas y leyes físicas utilizadas para representar matemáticamente el problema.
	Formular	
Resolver	Métodos resolver sistemas de ecuaciones lineales	Tipos de procedimientos utilizadas para resolver los sistemas de ecuaciones lineales
Verificar y reflexionar	Verificar	Formas de verificar y reflexionar física y matemáticamente acerca de la solución dada al problema
	Reflexionar	
Extender		Formas de utilizar las estrategias para resolver problemas que involucran otros tipos de circuitos

5 8 3

## CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

El enfoque de investigación adoptado, junto a las secuencias de aprendizaje, los procesos de análisis y codificación de datos, posibilitó caracterizar las estrategias de los participantes para resolver problemas de física como un proceso caracterizado por un flujo de acciones, entre los subprocesos de interpretar, conjeturar, formalizar, resolver, verificar y reflexionar y extender. Estas categorías posiblemente estén inmersas en el modelo didáctico para resolver problemas de física propuesto por Jensen, Niss y Jankvist, (2017) y las estrategias para resolver problemas en matemáticas de Polya

(1945), Mason, Burton y Stacey (2010) y Mayer (2010). Posiblemente la razón radica, en que las estrategias y el modelo para resolver problemas de física propuestos por estos autores son más generalizados, mientras las estrategias caracterizadas desde las manifestaciones de los estudiantes en este trabajo están a un nivel más local que global; aunque algunas de ellas parecen coincidir.

Finalmente los autores consideran que las estrategias halladas son una fiel representación de los datos manifestados por los estudiantes y que esta caracterización no es única. Otro investigador con otras perspectivas puede

hallar otras estrategias que posiblemente aquí no fluyeron. De la investigación surge un dilema, ¿las estrategias para resolver problemas de física están inmersas en las de resolver problemas matemáticos o viceversa?, o posiblemente existe una dualidad inseparable entre estos procesos.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bing, T., & Redish, E. (2009). Analyzing problem solving using math in physics: Epistemological framing via warrants. *Physical Review Special Topics-Physics Education Research*, 5(2), 020108. doi:10.1103/PhysRevSTPER.5.020108
- Docktor, J., Strand, N., Mestre, J., & Ross, B. (2015). Conceptual problem solving in high school physics. *Physical Review Special Topics-Physics Education Research*, 11(2), 02016. doi:10.1103/PhysRevSTPER.11.020106
- Elizondo Treviño, M. (2013). Dificultades en el proceso enseñanza aprendizaje de la Física. *Presencia universitaria*, 3(5), 70-77.
- Huffman, D. (1997). Effect of explicit problem solving instruction on high school students' problem-solving performance and conceptual understanding of physics. *Journal of Research in Science Teaching: The Official Journal of the National Association for Research in Science Teaching*, 34(6), 551-570.
- Ince, E. (2018). An Overview of Problem Solving Studies in Physics Education. *Journal of Education and Learning*, 7(4), 191-200.
- Jensen, J., Niss, M., & Jankvist, U. (2017). Problem solving in the borderland between mathematics and physics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(1), 1-15. doi:10.1080/0020739X.2016.1206979
- Koman, B., & Hill, D. (2006). *Algebra Liineal* (8 ed.). (V. Ibarra Mercado, Trad.) México, México: Pearson Educación.
- Larkin, J., & Reif, F. (1979). Understanding and teaching problem-solving in physics. *European journal of science education*, 1(2), 191-203.
- Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically* (2 ed.). Harlow, UK: Pearson Education Limited.
- Mayer, R. (2010). Problem Solving and Reasoning. *International Encyclopedia of Education*, 273-278. doi:10.1016/B978-0-08-044894-7.00487-5
- Meli, K., Zacharos, K., & Koliopoulos, D. (2016). The integration of mathematics in physics problem solving: A case study of Greek upper secondary school students. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 16(1), 48-63.
- Polya, G. (1945). *How To Solve It*. Princeton: Princeton University Press.
- Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery*. New York: Wiley.
- Taasoobshirazi, G., & Farley, J. (2013). A multivariate model of physics problem solving. *Learning and Individual Differences*, 24, 53-62. doi:10.1016/j.lindif.2012.05.001
- Von Glasersfeld, E. (2013). *Radical constructivism* (Vol. 6). Routledge.