

RECIBIDO EL 6 DE JULIO DE 2021 - ACEPTADO EL 7 DE OCTUBRE DE 2021

INTERPRETACIONES SEMIÓTICAS DE MEDIA ARITMÉTICA COMO MEDIDA DE TENDENCIA CENTRAL.

INTERPRETACIONES SEMIÓTICAS DE LA MEDIA ARITMÉTICA COMO MEDIDA DE TENDENCIA CENTRAL

Jenny Carolina Daza Pirateque¹

José Francisco Leguizamón Romero²

Andrés Fabián Álvarez Cipamocha³

Universidad Pedagógica y Tecnológica de
Colombia

· 2 9 0 ·

RESUMEN

Dada la importancia actual de la estadística para el óptimo desempeño en diferentes aspectos de la vida cotidiana, que permiten participar y comprender el mundo circundante; en las últimas décadas se ha desarrollado, de manera paulatina, un interés por la Didáctica de la Estadística en búsqueda de comprender

y mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta área. En este sentido, y teniendo en cuenta que “hoy en día se considera que no es posible estudiar los fenómenos relacionados con el conocimiento sin recurrir a la noción de representación” (Tamayo, 2006, p. 41), y en búsqueda de reconocer algunas dificultades que presentan los estudiantes en relación con las principales medidas de tendencia central, en este artículo se realiza un acercamiento a las representaciones semióticas y las transformaciones del objeto media, para luego buscar estrategias que faciliten su comprensión y permitan contribuir con los procesos de enseñanza y aprendizaje de este objeto.

¹ Maestría en Educación Matemática
jennycarolina.daza@uptc.edu.co 3133125934
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Tunja-
Colombia

² Doctor en Ciencias de la Educación
francisco.leguizamon@uptc.edu.co
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia., Tunja-
Colombia

³ Magister en Educación Matemática
andresfabian.alvarez@uptc.edu.co Universidad Pedagógica
y Tecnológica de Colombia. Tunja-Colombia

PALABRAS CLAVE

Estadística, media aritmética, representaciones semióticas, formación, tratamiento, conversión.

INTRODUCCIÓN

Teniendo en cuenta el desarrollo de la estadística como ciencia y su utilidad en la investigación, la técnica y la vida profesional, en las últimas décadas se ha suscitado un interés por su enseñanza dentro de la educación matemática y se ha incluido en el currículo, incluso desde los primeros años de formación académica.

Según Holmes (1980, citado en Batanero, 2000) entre las razones de la importancia de la inclusión de la estadística desde los primeros niveles de educación primaria se pueden destacar las siguientes: es una parte de la educación general deseable para los futuros ciudadanos adultos, quienes precisan adquirir la capacidad de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos, que con frecuencia aparecen en medios informativos, con el fin de interpretar información que le permita orientarse en las diferentes estancias del mundo globalizado. Es útil en la vida posterior, ya que en muchas profesiones se precisan unos conocimientos básicos sobre el tema. Su estudio ayuda al desarrollo personal, fomentando un razonamiento crítico, basado en la valoración de la evidencia objetiva, valorando los juicios propios e interpretando los de los demás. Finalmente, ayuda a comprender los restantes temas del currículo, tanto en la educación obligatoria como posterior, donde con frecuencia aparecen gráficos, resúmenes o conceptos estadísticos.

La importancia de la estadística es entonces clara y su inclusión en el currículo desde los primeros años de formación ya se ha generalizado, delegando su enseñanza a los profesores de matemáticas. Sin embargo, Batanero (2000) indica que existe una paradoja al pedir a los profesores que enseñen un nuevo

contenido, para el que no todos han tenido una formación didáctica específica, y esto, porque la didáctica de la estadística no está lo suficientemente desarrollada, siendo el número de investigaciones en este campo todavía escaso; por lo que aún están empezando a conocerse las principales dificultades en el aprendizaje de los conceptos más importantes, es entonces necesario experimentar y evaluar métodos de enseñanza para la naturaleza específica de la estadística, dado que no siempre se pueden transferir los principios generales de la enseñanza de la matemática. En este sentido Cobb y More (1997) afirmaron que “la estadística requiere una manera diferente de pensar, porque los datos no son números, se trata de números con un contexto...en la Matemática el contexto obscurece la estructura... en el análisis de datos, el contexto le da sentido” (pp.801-803).

En Colombia, también se han realizado esfuerzos por fortalecer la enseñanza de la estadística; el Ministerio de Educación Nacional (MEN), dentro de los estándares básicos de competencias en matemáticas, contempla el pensamiento aleatorio y sistemas de datos como una parte esencial del pensamiento matemático, resaltando su importancia en la toma de decisiones y estableciendo como prioridad, desarrollar en los estudiantes habilidades que les permitan analizar y utilizar los resultados que se publiquen en diferentes medios de información.

En este sentido, el reporte que se presenta en este texto surgió a partir de la reflexión sobre la labor docente, en específico dentro de la preocupación por fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de la estadística, dado que, aunque su inclusión en el currículo es ya un hecho, en la práctica se encuentra que los estudiantes muestran dificultades incluso con los principales conceptos, como lo son las medidas de tendencia central, fenómeno que se presenta aún en los últimos niveles de educación media.

Así, en el primer apartado del presente artículo se presentan los principales aspectos de la Teoría de las Representaciones Semióticas, pues dentro de ésta, se enmarca el desarrollo de este trabajo investigativo, estableciendo los registros y representaciones semióticas que se consideraron durante la investigación.

En el segundo apartado se puede seguir la ruta metodológica, teniendo en cuenta que esta es de tipo mixto, con enfoque descriptivo interpretativo; así mismo, se describen los instrumentos para la recolección de la información, estableciendo una unidad de análisis a priori. Finalmente, se presenta el análisis de los resultados y se discuten en relación con algunas investigaciones previas y en concordancia con la teoría de las representaciones semióticas de Duval.

ASPECTOS TEÓRICOS

REPRESENTACIONES Y REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICAS EN MATEMÁTICAS.

La semiótica y la matemática no se pueden considerar como disciplinas aisladas y atemporales; por el contrario, “la semiótica y la matemática nacieron y crecieron juntas, una al lado de la otra, ayudándose y sosteniéndose entre sí, a espaldas de todos por mucho tiempo” (D’Amore et al., 2013). En cuanto a su relación, fue por mucho tiempo ignorada y solo hasta hace algunas décadas se empezó a estudiar, convirtiéndose rápidamente en el eje central de numerosos estudios.

La semiótica en matemáticas es importante debido a que, a diferencia de otras disciplinas, en las cuales se cuenta con objetos de realidad tangible a los que se puede acceder a partir de los sentidos, en matemáticas los objetos que se estudian no existen en una realidad concreta, por tanto, solamente tenemos acceso a sus representaciones y a partir de ellas se debe construir y conocer el objeto. “Aquello que se

aprende a manejar en nuestra disciplina, no son objetos (los conceptos en nuestro caso) sino sus representaciones semióticas. La semiótica en matemáticas y en didáctica de la matemática es por lo tanto de fundamental importancia” (Fandiño, 2009).

Así, el estudio de las matemáticas se ve inmerso en un mundo donde converge lo conceptual, simbólico y representativo; según Duval (2017), en el aprendizaje de las matemáticas se constituye un campo de estudio propicio para el análisis de actividades cognitivas fundamentales, como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. Enseñar y aprender matemáticas, requiere entonces del uso de variados sistemas de expresión y de representación distintos a los del lenguaje natural o del de las imágenes: diferentes sistemas de escritura para los números, notaciones simbólicas para los objetos, escrituras algebraicas y lógicas para las relaciones y las operaciones, figuras geométricas, representaciones en perspectiva, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, entre otros.

En este sentido, las representaciones semióticas “aparecen como herramientas comunes para producir nuevo conocimiento y no solo para comunicar cualquier representación mental particular” (Duval y Saénz, 2016, p. 62) y “hacen referencia a todas aquellas construcciones de sistemas de expresión y representación que pueden incluir diferentes sistemas de escritura, como números, notaciones simbólicas, representaciones tridimensionales, graficas, redes, diagramas, esquemas, etc. Cumplen funciones de comunicación, expresión, objetivación y tratamiento” (Tamayo, 2006, p. 41)

Según Duval (2017), en matemáticas no puede haber comprensión si no se distingue claramente un objeto de su representación, pues un mismo objeto matemático puede darse

a partir de representaciones muy diferentes. Por tanto, es esencial no confundir los objetos matemáticos (números, funciones, rectas, etc.) con sus representaciones (escrituras decimales o fraccionarias, los símbolos, los gráficos, las líneas de las figuras, etc.). El confundir el objeto con su representación conlleva a una pérdida de comprensión, dado que los conocimientos adquiridos se hacen inutilizables en un contexto diferente.

Por objeto matemático Blumer (1982, como se citó en Godino, 2002) se refiere a “todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a lo cual puede hacerse referencia cuando hacemos, comunicamos o aprendemos matemáticas”. Luego, la naturaleza de los objetos matemáticos puede variar según la actividad matemática que se pone en juego.

Ahora, las representaciones de dichos objetos matemáticos tienen un rol primordial desde su situación epistemológica como desde el proceso de adquisición del conocimiento matemático. “En primer lugar, constituyen el único medio de acceso a los objetos matemáticos; lo cual plantea el problema cognitivo del paso de la representación de un objeto a otra representación de ese mismo objeto. Luego, y, ante todo, las estrategias matemáticas implican de manera intrínseca la transformación de representaciones semióticas” (Duval y Sáenz, 2016, p.63). Es decir, en el proceso de pensamiento cognitivo que subyace en matemáticas es necesaria la adquisición de una o más representaciones semióticas de un mismo objeto matemático, la capacidad de interpretarlas y de realizar transformaciones entre ellas.

Entonces, en la actividad matemática están presentes las tres actividades esenciales tanto para el análisis cognitivo como para las condiciones del aprendizaje conceptual: formación, tratamiento y conversión. Al realizar una actividad matemática se deben elegir los elementos distintivos que se quieren presentar

del objeto matemático al que se hace relación, elegir el registro semiótico en el cual se desean representar y dentro de dicho registro elegir entre las diversas representaciones posibles. Luego se debe transformar dicha representación, es decir pasar de la representación que se tiene a una nueva representación. Si durante la transformación se permanece en un mismo registro se ha realizado un tratamiento, mientras que si se ha cambiado de registro se habla entonces de conversión.

Aunque Duval reconoce que las tres actividades son importantes en el desarrollo cognitivo de las personas, da un lugar muy importante a la conversión, pues para él esta actividad requiere de la conciencia por parte del sujeto de la diferencia entre el objeto representado y su representación. Sin embargo, es precisamente en la poca distinción que se realiza entre representante y representado, entre forma y contenido, entre el objeto y su representación, y en la dificultad para coordinar los diferentes registros de representación semiótica que se encuentran los principales obstáculos semióticos, y por tanto, desde el ámbito de la enseñanza se debe dedicar mayor esfuerzo, no solamente a conocer estos procesos, sino a reconocer su forma de aplicación en los contextos de enseñanza de las ciencias (Tamayo, 2006).

Análogamente, la diversificación de registros es importante dado que no es posible pensar que una única representación semiótica pueda presentar todos los componentes de un objeto matemático, de hecho, solamente vehicula algunos de los aspectos conceptuales del objeto en cuestión. Es así, como no se debe focalizar la atención en cada representación aislada sino en las variaciones de las representaciones dentro de un registro y sobre las correspondientes variaciones en otro registro (D'Amore, et al., 2013). Sin embargo, “cambiar la forma de una representación es, para muchos alumnos de los

diferentes niveles de enseñanza, una operación difícil e incluso en ocasiones imposible. *Todo sucede como si para la gran mayoría de los alumnos la comprensión que logran de un contenido quedara limitada a la forma de representación utilizada*" (Duval, 2017, p.61).

REGISTROS DE REPRESENTACIÓN Y REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS DE LA MEDIA

Una vez establecida la base teórica, se establece cada uno de los registros y las representaciones semióticas por y para esta

investigación. Siguiendo la notación que se sugiere en D'Amore (2006; 2013), estableciendo algunas acepciones y adaptaciones.

Así, en la Tabla 1 se establecen los registros y representaciones semióticas para la media, teniendo en cuenta que:

Registro semiótico para la media

$$r^m(\bar{x}) ; \text{ donde } m = 1,2,3 \dots ; \text{ donde}$$

Representación semiótica *i*-ésima para la media dentro del registro semiótico $r^m(\bar{x})$ a $R_i^m(\bar{x})$; con $i = 1,2,3,\dots$

Tabla 1. Registros y representaciones semióticas de la media.

Media		
Registro semiótico	$r^1(\bar{x})$	Lenguaje natural
Representación semiótica	$R_1^1(\bar{x})$	Suma de todos los valores dividida en el número total de datos.
	$R_2^1(\bar{x})$	Valor representativo de un conjunto de datos.
	$R_3^1(\bar{x})$	Cantidad equitativa a repartir cuando se tiene diferentes cantidades de una cierta magnitud y queremos distribuirla de forma uniforme
	$R_4^1(\bar{x})$	Mejor estimación de una cantidad desconocida cuando se ha hecho varias medidas de esta.
Registro semiótico	$r^2(\bar{x})$	Lenguaje simbólico
Representación semiótica.	$R_1^2(\bar{x})$	$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$
	$R_2^2(\bar{x})$	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$
	$R_3^2(\bar{x})$	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$
	$R_4^2(\bar{x})$	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$
Registro semiótico	$r^3(\bar{x})$	Lenguaje gráfico

Registro semiótico	$r^3(\bar{x})$	Lenguaje gráfico																								
Representación semiótica	$R_1^3(\bar{x})$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Tallo</th> <th>Hojas</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>7 7 7 8 8 8 8 8 9 9</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>0 1 1 1 1 1 2 5 5</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	Tallo	Hojas	1	7 7 7 8 8 8 8 8 9 9	2	0 1 1 1 1 1 2 5 5	4	0																
Tallo	Hojas																									
1	7 7 7 8 8 8 8 8 9 9																									
2	0 1 1 1 1 1 2 5 5																									
4	0																									
	$R_2^3(\bar{x})$	<p>Diagrama de barras para variable discreta</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Clase</th> <th>Frecuencia</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>4</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>9</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	Clase	Frecuencia	4	1	7	4	8	3	9	2	10	1												
Clase	Frecuencia																									
4	1																									
7	4																									
8	3																									
9	2																									
10	1																									
	$R_3^3(\bar{x})$	<p>Histograma para variable continua</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Clases</th> <th>Frecuencia</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>[1, 3.5]</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>[3.5, 6]</td> <td>12</td> </tr> <tr> <td>[6, 8.5]</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>[8.5, 11]</td> <td>10</td> </tr> </tbody> </table>	Clases	Frecuencia	[1, 3.5]	8	[3.5, 6]	12	[6, 8.5]	0	[8.5, 11]	10														
Clases	Frecuencia																									
[1, 3.5]	8																									
[3.5, 6]	12																									
[6, 8.5]	0																									
[8.5, 11]	10																									
Registro semiótico	$r^4(\bar{x})$	Lenguaje tabular																								
Representación semiótica	$R_1^4(\bar{x})$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x_i</th> <th>Frecuencia (f)</th> <th>Frecuencia relativa (fr)</th> <th>Frecuencia acumulada (F)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>4</td> <td>1</td> <td>1/11</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>4</td> <td>4/11</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>3</td> <td>3/11</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>9</td> <td>2</td> <td>2/11</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>1</td> <td>1/11</td> <td>11</td> </tr> </tbody> </table>	x_i	Frecuencia (f)	Frecuencia relativa (fr)	Frecuencia acumulada (F)	4	1	1/11	1	7	4	4/11	5	8	3	3/11	8	9	2	2/11	10	10	1	1/11	11
x_i	Frecuencia (f)	Frecuencia relativa (fr)	Frecuencia acumulada (F)																							
4	1	1/11	1																							
7	4	4/11	5																							
8	3	3/11	8																							
9	2	2/11	10																							
10	1	1/11	11																							
	$R_2^4(\bar{x})$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Clase</th> <th>Marca de clase (x_i)</th> <th>Frecuencia (f)</th> <th>Frecuencia relativa (fr)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>[1, 3.5)</td> <td>2.25</td> <td>8</td> <td>8/30</td> </tr> <tr> <td>[3.5, 6)</td> <td>4.75</td> <td>12</td> <td>12/30</td> </tr> <tr> <td>[6, 8.5)</td> <td>7.25</td> <td>0</td> <td>0/30</td> </tr> <tr> <td>[8.5, 11]</td> <td>9.75</td> <td>10</td> <td>10/30</td> </tr> </tbody> </table>	Clase	Marca de clase (x_i)	Frecuencia (f)	Frecuencia relativa (fr)	[1, 3.5)	2.25	8	8/30	[3.5, 6)	4.75	12	12/30	[6, 8.5)	7.25	0	0/30	[8.5, 11]	9.75	10	10/30				
Clase	Marca de clase (x_i)	Frecuencia (f)	Frecuencia relativa (fr)																							
[1, 3.5)	2.25	8	8/30																							
[3.5, 6)	4.75	12	12/30																							
[6, 8.5)	7.25	0	0/30																							
[8.5, 11]	9.75	10	10/30																							

Fuente: Elaboración propia.

METODOLOGÍA

Dado que el interés de este proyecto investigativo se fundamenta en el análisis de las interpretaciones que dan los estudiantes a objetos estadísticos en las diferentes representaciones semióticas, el tipo de investigación es de corte mixto, en donde “se recolectan datos, tanto cuantitativos como cualitativos, del sistema social sobre ciertas categorías (algunas preconcebidas y otras no, estas últimas emergerán del trabajo de campo). Al final, se describen las categorías y la cultura en términos estadísticos y narrativos” (Hernández, Fernández y Baptista, 2010, p.485).

Así, y teniendo en cuenta que el estudio se centró en determinar las representaciones semióticas que reconocen los estudiantes acerca de la media aritmética de un conjunto de datos estadísticos; al igual que en, los procesos que permiten un acercamiento al desarrollo cognitivo del estudiante en cuanto a tratamiento y conversión que realizan, se hace mayor énfasis en el enfoque cualitativo puesto que “...los métodos cualitativos se pueden usar para obtener detalles complejos de algunos fenómenos, tales como sentimientos, procesos

de pensamientos y emociones, difíciles de extraer o de aprehender por métodos de investigación más convencionales” (Strauss y Corbin, 1990, p. 13). Sin embargo, se utilizaron algunas técnicas cuantitativas para establecer los índices de dificultad asociados al cuestionario, basados en el número de respuestas correctas.

La investigación se adelantó para estudiantes de grado undécimo de educación media académica, teniendo en cuenta que al estar en la cúspide de dicho proceso formativo han podido interactuar desde diferentes perspectivas y en varias oportunidades con el objeto matemáticos media. En específico, se contempló a estudiantes de dicho nivel escolar de una institución educativa Tunjana.

Para la recolección de la información se procede a la estructuración del cuestionario, el cual consto de 9 ítems, sin embargo para el presente artículo solamente se muestra la descripción y análisis de 2 de estos ítems, para los cuales se establecen las unidades de análisis respectivas para su posterior tratamiento; así, tanto para la construcción y análisis de dicho instrumento, se estableció la matriz mostrada en la tabla 2.

Tabla 2. Descripción y unidad de análisis del cuestionario

Ítem	Descripción.	Unidad de análisis.
<p><i>Un periódico dice que el número medio de hijos por familia en Tunja es 1.2 hijos por familia.</i></p> <p><i>a) Explica que significa para ti esa frase.</i></p> <p><i>b) Se han elegido 10 familias tunjanas y el número medio de hijos entra las 10 familias es 1.2 hijos por familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo ¿Cuántos hijos podrían tener las otras 8 familias para que la media de en las diez familias sea 1.2?</i></p>	<p>Este ítem se trabajó en el estudio de Watson (2000) y posteriormente en la investigación de Cobo (2003) en la cual se realizó una adaptación al contexto, al formato abierto y se añadió un nuevo interrogante para evaluar algunos elementos de significado.</p> <p>Esta situación, se centra en la comprensión de media, aunque también incluye implícitamente el significado de la moda.</p> <p>Con el apartado a) se pretende que el estudiante dé una definición de la media con sus propias palabras, en la cual, se podría esperar que se presente la media como reparto equitativo o como valor más probable al tomar un elemento de una población.</p> <p>En el apartado b), se pide que para una media dada se encuentre la respectiva distribución, lo cual implica que se comprenda el algoritmo de cálculo y se aplique de manera inversa. Otra forma posible para la solución consiste en utilizar la estrategia de ensayo y error, lo que adicionalmente implicaría la</p>	<p>En el literal a), puede presentarse un registro de representación en lenguaje natural $r^1(\bar{x})$ aludiendo a la media como valor más probable $R_4^1(\bar{x})$, valor representativo del conjunto de datos $R_2^1(\bar{x})$, cantidad equitativa en una repartición $R_3^1(\bar{x})$, o como la descripción del proceso de cálculo habitual $R_1^1(\bar{x})$.</p> <p>En el literal b), se intuye el uso del registro de representación en lenguaje natural: Media como representante del conjunto de datos, o al algoritmo inverso de cálculo de la media en donde se debe encontrar los datos faltantes, tales que, al realizar la suma y dividir en 10 se obtenga como resultado 1.2.</p> <p>Así mismo, en dicho literal, se incluye el registro semiótico de lenguaje simbólico $r^2(\bar{x})$, recurriendo a la representación $R_1^2(\bar{x})$, para establecer el algoritmo inverso para solucionar la situación:</p> $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ <p>Finalmente, en este ítem, se debe realizar una conversión del</p>

	<p>compresión del algoritmo del cálculo de la media.</p>	<p>registro semiótico $r^1(\bar{x})$ y $r^2(\bar{x})$; luego, se debe realizar tratamiento dentro del mismo registro.</p>
<p><i>Un anuncio de cajas de cerillas indica que el número medio de cerillas por caja es de 35. Representa una gráfica de una posible distribución del número de cerillas en 100 cajas, de modo que la media sea igual a 35.</i></p>	<p>Este ítem se presenta en Batanero y Godino (2001) e involucra la comprensión de la media como representante de una distribución. Así, a partir del enunciado el estudiante debe encontrar una de las muchas distribuciones posibles cuya media sea 35. Para esto, se debe conocer y manejar el algoritmo de cálculo directo de la media para poder trabajar con él, ya sea realizando estrategia de ensayo y error, o reconociendo que la distribución más sencilla que se puede realizar es aquella compuesta por 100 veces el número 35, lo cual indicaría una adecuada comprensión del cálculo e interpretación de esta medida de tendencia central.</p>	<p>El enunciado del ítem presenta la información en el registro de representación semiótico de lenguaje natural $r^1(\bar{x})$, y explícitamente se solicita al estudiante que realice una representación gráfica de una posible distribución; por tanto, se involucra la actividad cognitiva de conversión hacia el registro de representación $r^3(\bar{x})$ en cualquiera de sus representaciones $R_1^3(\bar{x})$, $R_2^3(\bar{x})$ o $R_3^3(\bar{x})$. En el desarrollo de la situación el estudiante puede recurrir a calcular la media de una distribución utilizando el registro de representación simbólico $r^2(\bar{x})$ posiblemente en las representaciones $R_1^2(\bar{x})$, $R_2^2(\bar{x})$ o $R_3^2(\bar{x})$. Lo cual, involucraría conversión desde $r^1(\bar{x})$ hacia $r^2(\bar{x})$ si se busca encontrar una distribución y a partir de esta realizar la representación gráfica, o, desde $r^2(\bar{x})$ hacia $r^1(\bar{x})$ si se busca validar una gráfica que ha sido previamente elaborada. Cualquiera que sea el caso, involucraría actividad de tratamiento en el registro $r^2(\bar{x})$.</p>

Fuente: Elaboración propia.

ANÁLISIS DE RESULTADOS Y DISCUSIÓN.

El análisis descriptivo de los hallazgos obtenidos en cada ítem se realiza en correspondencia con los registros de representación semiótica, presentados en el marco teórico y teniendo en cuenta la unidad de análisis, además se muestran algunos fragmentos de las respuestas dadas por los estudiantes.

Ítem 1.

Este ítem hace referencia de manera implícita a la media y a la moda. En el primer apartado, se busca que los estudiantes definan, con sus propias palabras, a la media como valor representativo de un conjunto de datos $R_2^1(\bar{x})$,

reparto equitativo $R_3^1(\bar{x})$, o valor más probable dentro de una distribución $R_4^1(\bar{x})$, e incluso, haciendo referencia al procedimiento de cálculo $R_1^1(\bar{x})$; todo esto, dentro del registro de representación de lenguaje natural $r^1(\bar{x})$, en relación con la unidad de análisis establecida.

Así, a partir de las respuestas de los estudiantes, se observa que en su mayoría, hacen referencia a la representación $R_1^1(\bar{x})$, ya sea planteada como la descripción del proceso algorítmico para obtener la media, o simplemente aludiendo a esta como media o promedio. Es importante destacar que, a pesar de existir diferentes promedios, los estudiantes E2, E3, E4, E5, E6 y E7 establecen una correspondencia entre promedio aritmético y media, incluso acudiendo a cualquiera de los dos términos como sinónimos.

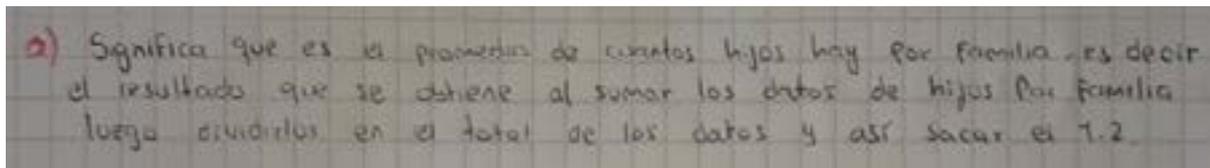


Figura 1. Respuesta por parte de E4 al ítem 1 literal a).

Si bien todos los estudiantes no logran establecer a la media como un valor representativo del conjunto de los datos $R_2^1(\bar{x})$, los estudiantes E2, E4, E8, E10, hacen referencia indirecta a ello, estableciendo que la media sería el valor que mejor representa la distribución. En relación con este tipo de representación, dentro del registro del lenguaje natural, se evidencia que los estudiantes entienden a la media como una operación no interna, y la cual no corresponde

necesariamente con uno de los elementos del conjunto de datos, sin dejar de ser el valor representativo.

A diferencia de lo expuesto por Cobo (2003), en nuestro grupo de estudio, no se encuentra de manera mayoritaria una referencia directa a la media como reparto equitativo $R_3^1(\bar{x})$, solamente, se cuenta con los estudiantes E7 y E10, quienes proyectan dicho resultado por familia de manera equitativa.

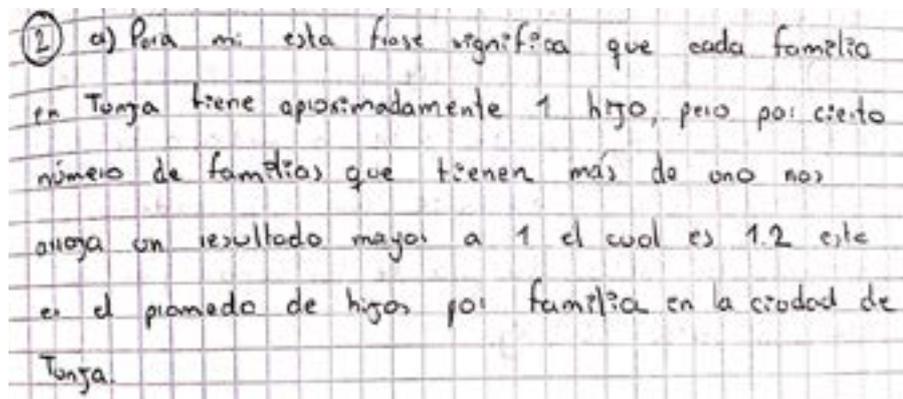


Figura 2. Respuesta por parte de E7 al ítem 1 literal a)

Finalmente, al analizar a la media como valor más probable, los estudiantes E2, E3 y E7, efectivamente justifican que, si se toma un dato de alguna familia al azar, lo más probable sea encontrar que tienen uno o dos hijos; así mismo, tal como se mostró en la figura anterior, los estudiantes no se desentienden de la posibilidad de que en alguna de dichas familias se puedan encontrar diferente número de hijos.

A pesar de lo descrito, este tipo de representación en algunos estudiantes causa conflictos de definición; como se mostrará en la figura 23, al especificar que la mayoría de las familias tienen solo un hijo o incluso dos, se desconocen las

posibles distribuciones de los datos; así, ese valor establecido por los estudiantes E1 y E9, lo asocian con un promedio que resulta ser la moda.

Teniendo en cuenta que, este literal se enmarcó en el registro de representación del lenguaje natural $r^1(\bar{x})$, se evidencia el uso de la actividad cognitiva de tratamiento, en la cual los argumentos de los estudiantes apuntan a la media dentro de dos o tres representaciones diferentes dentro de este registro. En muchos de los casos, como argumentos que permiten reafirmar o explicar mejor sus justificaciones.

300

Tabla 3. Representaciones utilizadas por los estudiantes en el ítem 1 literal a).

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10
$R_1^1(\bar{x})$		X	X	X	X	X	X			X
$R_2^1(\bar{x})$		X		X				X		X
$R_3^1(\bar{x})$							X			X
$R_4^1(\bar{x})$		X	X				X			

Fuente: Elaboración propia.

Para terminar el análisis de este literal, en la tabla 3 se relacionan las representaciones semióticas dentro del registro de representación $r^1(\bar{x})$, así, se vislumbra que las representaciones más referidas por los estudiantes fueron $R_1^1(\bar{x})$ y $R_2^1(\bar{x})$; caso contrario a las representaciones que relacionan a la media como reparto equitativo o como valor más probable dentro de un conjunto de datos $R_3^1(\bar{x})$ y $R_4^1(\bar{x})$.

En cuanto al literal b, en el cual se pide encontrar posibles distribuciones, a partir de un valor de la media establecido; el estudiante debe contemplar diferentes representaciones, que posiblemente se movilizan dentro de dos

registros particulares, a saber: registro semiótico de lenguaje natural $r^1(\bar{x})$ y registro semiótico de lenguaje simbólico $r^2(\bar{x})$.

Así mismo, se debe comprender el algoritmo de cálculo de la media, ya sea para aplicarlo de manera inversa o para realizar estrategias de ensayo y error; por lo cual, los estudiantes además de implementar los registros mencionados deben establecer actividades de tratamiento dentro cada uno, atendiendo a diferentes representaciones como:

$R_1^1(\bar{x})$, $R_2^1(\bar{x})$, $R_3^1(\bar{x})$ y $R_4^1(\bar{x})$ en $r^1(\bar{x})$ y $R_1^2(\bar{x})$ y $R_2^2(\bar{x})$ para $r^2(\bar{x})$.

En cuanto al proceso de conversión, se espera que los estudiantes se movilicen entre ambos registros.

Tabla 4. Representaciones utilizadas por los estudiantes en el ítem 1 literal b).

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10
$r^1(\bar{x})$	$R_1^1(\bar{x})$	X		X	X	X				
	$R_2^1(\bar{x})$		X						X	
	$R_3^1(\bar{x})$		X	X	X	X	X	X		
	$R_4^1(\bar{x})$									
$r^2(\bar{x})$	$R_1^2(\bar{x})$		X					X		
	$R_2^2(\bar{x})$	X			X		X		X	X

Fuente: Elaboración propia.

Para iniciar el análisis de este literal, en la tabla 4 se aprecia que la mayoría de los estudiantes conocen, enuncian, o establecen el algoritmo relacionado con la media; como se señaló en párrafos anteriores, si bien se planteaban solo algunos datos del conjunto total y la media respectiva, se evidenció que dichos estudiantes han implementado la inversión del algoritmo para centrar sus argumentos en los datos faltantes, de manera explícita o no, de la distribución. En consecuencia, sus argumentaciones, dadas en

cualquiera de los dos registros semióticos $r^1(\bar{x})$ y $r^2(\bar{x})$, contienen elementos de representación que refieren a dicho algoritmo.

De manera particular, los estudiantes E9 y E10 muestran una buena comprensión y tratamiento del algoritmo de la media, concluyendo que, si dadas dos familias que tienen 5 hijos, las familias faltantes deben sumar entre ellas 7 hijos. Sin embargo, en estos dos casos, no se llega a establecer una distribución que cumpla esta característica; lo anterior, se puede dar

según Cobo (2003) por la misma estructura de la pregunta, ya que en esta se indaga por cuántos hijos podrían tener las otras ocho familias, sin solicitar la predicción de una distribución.

b) $\bar{x} = \frac{S+x}{10}$ Atd: La suma de los hijos que tienen las familias restantes es 7

$$10 \cdot 12 = S+x$$

$$12 = \frac{S+x}{10}$$

$$12 \cdot 10 = S+x$$

$$120 = S+x$$

$$120 - S = x$$

$$7 = x$$

Figura 3. Respuesta por parte de E10 al ítem 1 literal b)

En contraste, los estudiantes E2, E3, E4, E5, E6, E7 y E8, además de establecer correctamente el algoritmo de la media y su inversión, muestran una distribución particular con la cual describen la cantidad de hijos que podría tener cada familia.

b) 8 familias deben tener 3 hijos, una de ellas (de las 10 familias) no tiene ningún hijo, 1 familia tiene 4; para tener un total de 12 hijos y así dividirlos en 10 para tener un total de 1.2 (media)

Figura 4. Respuesta por parte de E4 al ítem 1 literal b)

Particularmente, los estudiantes E2 y E3 reconocen la posible existencia de múltiples distribuciones; sin embargo, al intentar mostrar otra distribución no plantean con éxito el conjunto de datos posibles, ya sea porque ignoran a las familias que no tienen hijos, o porque hacen un mal conteo del total de las familias estudiadas.

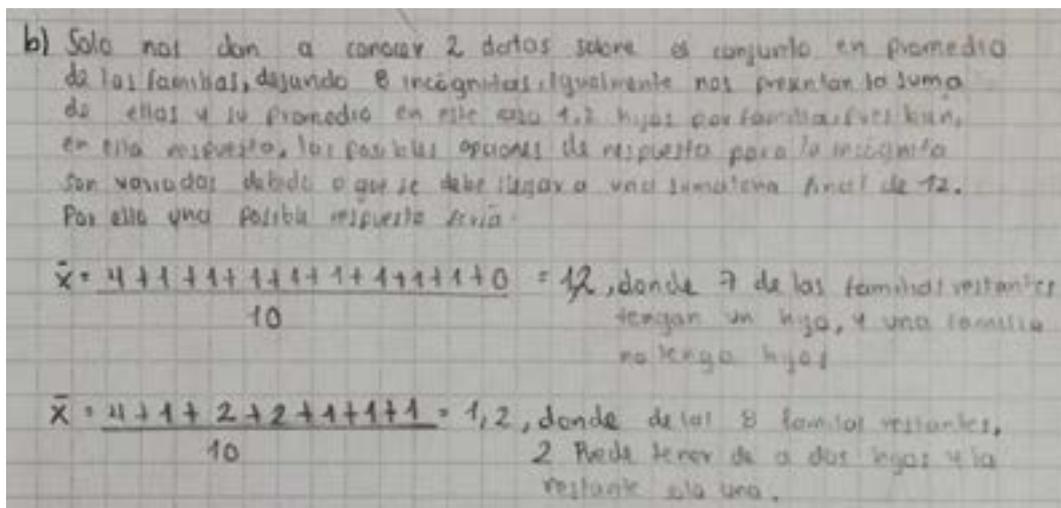


Figura 5. Respuesta por parte de E3 al ítem 1 literal b)

Es importante destacar que, todos los estudiantes que describen una distribución coinciden en que, de las ocho familias restantes siete deben tener un hijo, mientras que la otra no debe tener hijos. Una posible interpretación, es que los estudiantes representan a la media como un reparto equitativo $R_3^1(\bar{x})$.

Así mismo, se encuentra dentro de este estudio, un contraste significativo a lo expuesto por Cobo (2003), debido a que, en dicha investigación, mostrar posibles distribuciones del conjunto de datos, por parte de los estudiantes, no era frecuente.

En lo que respecta a las actividades cognitivas de la representación, se evidencia que, por lo general, los estudiantes establecen la formación de una representación semiótica para que, como establece Duval (2017), la situación descrita en el literal pueda verse como una representación dentro de cualquiera de los registros semióticos establecidos. A pesar de esto, dentro de la justificación dada por el estudiante E1, se encuentra un problema significativo en cuanto a esta actividad; si bien, se busca que “la formación de representaciones semióticas respete las reglas propias al sistema empleado no solo por razones de comunicabilidad ... Una

representación semiótica no debe salirse del dominio definido por las reglas que constituyen un sistema semiótico” (Duval, 2017, p. 77), el estudiante al establecer su proceso articula los dos tipos de registro $r^1(\bar{x})$ y $r^2(\bar{x})$ combinando los signos propios de algunas de sus representaciones, y esto no permite establecer una adecuada representación del algoritmo de la media en lenguaje natural o simbólico.

En cuanto a la actividad de tratamiento asociado al registro semiótico de lenguaje natural, se observa que múltiples estudiantes llevan a cabo lo que Duval (2017) enuncia como *paráfrasis*, para hacer una explicación y/o justificación de la información proporcionada y de sus razonamientos. Así mismo, como se muestra en la tabla 4, en la mayoría de los casos, prevalece la actividad de tratamiento entre diferentes representaciones dentro del registro.

En cuanto al tratamiento presentado dentro del registro de lenguaje simbólico, los estudiantes E8, E9, E10 no lo establecen entre representaciones de este, sino de manera interna dentro de cada representación; así, al representar la media mediante $R_2^2(\bar{x})$, ver Tabla 1, se evidencia un proceso algebraico que recurre

a las propiedades de los números reales para justificar la elección del número de hijos que deben tener las familias desconocidas.

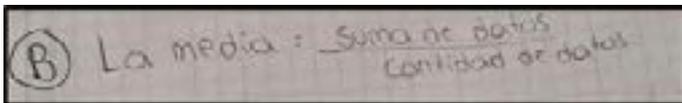


Figura 6. Evidencia actividad de formación por parte de E1 ítem 1

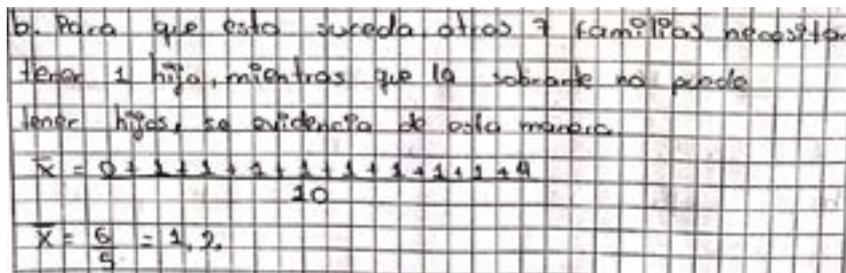


Figura 7. Evidencia actividad de tratamiento por parte del estudiante E8

Por último, en lo que respecta a la conversión, esta efectivamente surge de manera espontánea entre los dos registros, ya sea para explicar

el valor de la media dada, con el total de hijos para las ocho familias restantes, o para mostrar que la distribución planteada genera la media establecida en la situación.

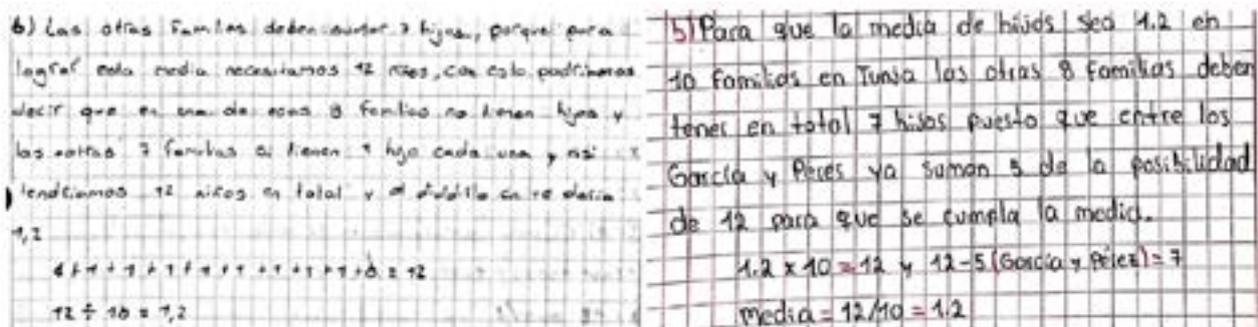


Figura 8. Actividad de conversión por parte de los estudiantes E5 y E9

Ítem 2.

Este ítem gira en torno a la comprensión de la media como representante de una distribución, y como mejor estimación de una cantidad desconocida. El estudiante, a partir de la lectura e interpretación del enunciado, debe encontrar una de todas las posibles distribuciones en las cuales $n = 100$ y $\bar{x} = 35$, para luego,

establecer la representación gráfica correspondiente. En este sentido, se involucra necesariamente la actividad cognitiva de conversión desde el registro de representación de lenguaje natural $r^1(\bar{x})$ hacia el registro de representación de lenguaje gráfico $r^3(\bar{x})$.

Así, se debe conocer y manejar el algoritmo de cálculo de la media para poder trabajar con él, ya sea realizando estrategia de ensayo y error,

o reconociendo que la distribución más sencilla que se puede realizar es aquella compuesta por 100 veces el número 35, lo cual indicaría una adecuada comprensión e interpretación de esta medida de tendencia central.

Dentro de las respuestas que más se acercan a establecer una distribución acorde con las características planteadas, están las de los estudiantes E2, E3 y E4, quienes logran establecer la representación $R_2^3(\bar{x})$ en relación con el registro semiótico de lenguaje gráfico. En específico, el estudiante E4 representa una distribución que cumple completamente con los parámetros establecidos, es decir

$n = 100$ y $\bar{x} = 35$; en dicha distribución, se evidencia que, aunque el estudiante maneja adecuadamente el algoritmo de la media de manera inversa, presenta dificultades al interpretar a la media como la mejor estimación de una cantidad desconocida. Por otra parte, presenta incongruencias con la escala del eje de las ordenadas.

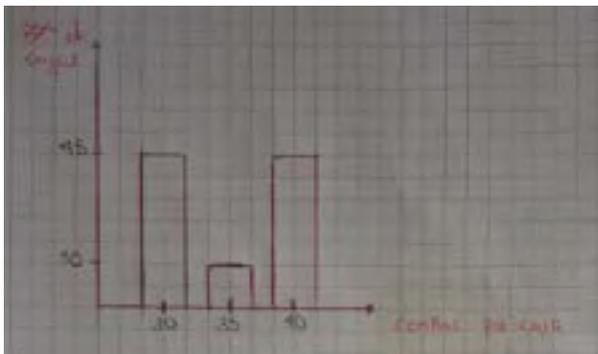


Figura 9. Respuesta por parte del estudiante E4 al ítem 2.

Por su parte, los estudiantes E2 y E3 presentan una distribución que cumple de manera parcial con la situación presentada, en ellas $n = 97$ y $n = 101$ y respectivamente, sin embargo, esta situación puede deberse a un error de conteo. De las gráficas mostradas se deduce un buen manejo de los algoritmos de cálculo de la media y una adecuada interpretación

de la media como mejor estimación de una cantidad desconocida.

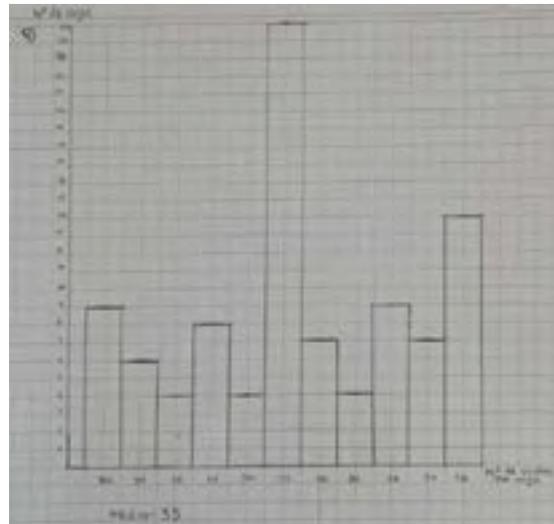


Figura 10. Respuesta por parte de E3 al ítem 2.

En contraste, los estudiantes E5, E6, E8, E9 y E10, presentan gráficos en los cuales intentan representar una distribución acorde con los parámetros establecidos; sin embargo, no les es posible realizar la actividad de conversión de manera satisfactoria, ya que, si bien entienden parcialmente la representación solicitada, no llegan a culminar la conversión de un registro a otro. En este caso, es claro que, los estudiantes no reconocen completamente lo que Duval (2017) denomina como “unidades significantes”, las cuales se necesitan para establecer una efectiva correspondencia entre el registro de salida y el de llegada.

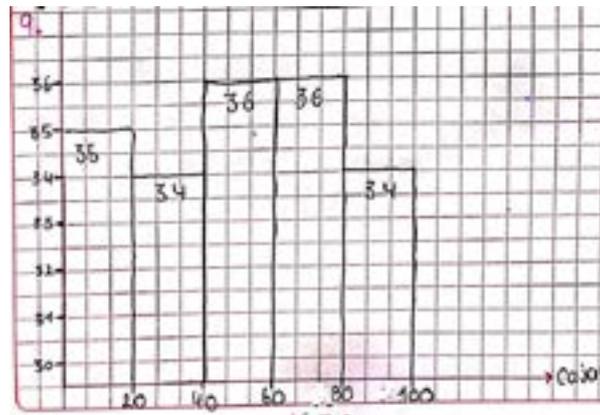


Figura 11. Respuesta por parte de E9 al ítem 2.

Para terminar, como se evidencia en la tabla 5, hubo dos estudiantes que no lograron establecer una respuesta a este ítem, lo cual indica cierta dificultad para llevar a cabo la consolidación de nuevas representaciones dentro de diferentes

registros semióticos, dejando de lado las actividades cognitivas de formación, tratamiento y conversión, cuando se trata de establecer un registro cualquiera proveniente del registro del lenguaje natural.

Tabla 5. Registros y representaciones semióticas utilizadas por parte de los estudiantes en el ítem 2.

z.

306

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10
$R_1^2(\bar{x})$										
$r^2(\bar{x})$					X	X				
$R_3^2(\bar{x})$										
$r^3(\bar{x})$										
$R_1^3(\bar{x})$										
$R_2^3(\bar{x})$		X	X	X	X	X		X		

Fuente: Elaboración propia.

CONCLUSIONES.

En el estudio se pudo establecer que los registros que más reconocen y ponen en juego los estudiantes son el registro de representación de lenguaje natural y el registro de representación simbólica; en ellos enmarcan sus actividades interpretativas, argumentativas y de razonamiento. Dentro de dichos registros, las representaciones que más se utilizan son aquellas que hacen referencia a

distribuciones para datos discretos, incluso en muchas ocasiones utilizándolas para analizar información que ha sido agrupada en intervalos de clase. Así, las representaciones que más se movilizan por parte de los estudiantes son

$$R_1^1(\bar{x}), R_2^1(\bar{x}), R_1^2(\bar{x}), R_2^2(\bar{x}), R_3^2(\bar{x}).$$

En cuanto a las actividades cognitivas fundamentales inherentes a la representación descritas por Duval (2017) se encuentra que generalmente la formación se da teniendo en

cuenta las unidades de análisis y las reglas de conformidad propias de cada registro. El tratamiento se desarrolla dentro de cada registro de representación, realizando transformaciones internas especialmente dentro del registro de lenguaje simbólico, teniendo en cuenta los algoritmos propios de la media aritmética y los procesos algebraicos asociados. También se presenta tratamiento dentro del registro de lenguaje natural, como paráfrasis, para hacer una explicación y/o justificación de la información proporcionada y de sus razonamientos. Finalmente, la actividad de conversión se da entre los registros de lenguaje natural y lenguaje simbólico, especialmente con fines comunicativos y/o argumentativos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 25, 41-58.
- Batanero, C., y Godino, J. D. (2001). *Análisis de datos y su didáctica*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Granada.
- Bertin (1967). *Semiologie graphique*. Paris: Gauthier-Villars.
- Cobb, G. y Moore, D. (1997). Mathematics, Statistics, and Teaching. *American Mathematical Monthly*, 104(9), 801-823.
- Cobo, B. (2003). *Significados de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria* (tesis doctoral), Universidad de Granada, Granada España.
- D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *RELIME Revista Latinoamericana de Investigación en matemática Educativa*, IX (1), 177-197.
- D'Amore, B., Fandiño, M. I., y Iori, M. (2013). *La semiótica en la didáctica de la matemática*. Bogotá, Colombia: Editorial magisterio
- Duval, R. (2017). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (M. V. Restrepo, Trad.) Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- Duval, R., y Saénz, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*. Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Recuperado de: https://www.academia.edu/27318074/Comprensión_y_aprendizaje_en_matemáticas_perspectivas_semióticas_seleccionadas
- Fandiño, M. I. (2009). *Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá, Colombia: Editorial Magisterio.
- Godino, J.D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 22, n° 2.3, pp. 237-284, 2002
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGRAW-HILL. Recuperado de: <http://observatorio.epacartagena.gov.co/wpcontent/uploads/2017/08/metodologia-de-la-investigacion-sexta-edicion.compressed.pdf>

Strauss, A. L., Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research*. Newbury Park, Ca: Sage

Tamayo, O. (2006). Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas. *Educación y pedagogía*, XVIII (45), 39-49