RECIBIDO EL 10 DE JULIO DE 2021 - ACEPTADO EL 11 DE OCTUBRE DE 2021

REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA PARA LA COMPRENSIÓN DE LA ELIPSE INTERACTUANDO CON GEOGEBRA

SEMIOTIC REPRESENTATION RECORDS FOR UNDERSTANDING THE ELLIPSE USING GEOGEBRA

William Armando Pineda Moreno[1]

Omaida Sepúlveda Delgado[2]

Gineth Natalia Romera López[3]

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Tunja, Boyacá, Colombia

RESUMEN

En el presente artículo se expone una experiencia en el aula de clase, la cual es producto de una investigación con el propósito de que los estudiantes de grado 10° de una Institución Educativa privada de Tunja, comprendan el objeto matemático elipse, coordinando los registros de representación semiótica, tales como: el registro algebraico, gráfico y verbal. El estudio se sustentó en la Teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval (1999), con un enfoque de tipo cualitativo, donde, se utiliza la ingeniería didáctica (Artigue, 1995) como metodología para llegar a la consecución de los objetivos propuestos. En lo referente a la fase experimental se utilizaron secuencias didácticas mediadas por el software GeoGebra; la teoría de los registros de representación semiótica y la teoría de las situaciones didácticas.

Entre los principales resultados de la investigación se observó que los estudiantes lograron coordinar los registros: pictórico y de lengua natural, así como también el registro algebraico con el gráfico.

PALABRAS CLAVE. Secciones cónicas, representaciones semióticas, Geogebra, secuencias didácticas.

1 Licenciado en Matemáticas y Estadística williamarmando.pineda@uptc.edu.co https://orcid.org/0000-0002-1417-4090

2 Doctora en Educación, Magister en ciencias Matemáticas, Licenciada en Matemáticas omaida.sepulveda@uptc.edu.co

3 Licenciada en Matemáticas Gineth.romero@uptc.edu.co https://orcid.org/0000-0002-4875-0607

ABSTRACT

This article presents an experience in the classroom, which is the product of an investigation with the purpose that 10th grade students of a private educational institution in Tunja would come to understand the mathematical object ellipse coordinating the semiotic representation registers, such as: the algebraic, graphic and verbal registers. The study was based on Duval's Theory of Semiotic Representation Registers (1999), with a qualitative approach, where didactic engineering (Artigue, 1995) was used as a methodology to achieve the proposed objectives. Regarding the experimental phase, didactic sequences mediated by Geogebra software, the theory of semiotic representation registers and the theory of didactic situations were used.

Among the main results of the research, it was observed that the students were able to coordinate the pictorial and natural language registers, as well as the algebraic register with the graphic register.

KEYWORDS. Conical sections, semiotic representations, Geogebra, teaching sequences.

INTRODUCCIÓN

En el estudio de la geometría analítica, los estudiantes se enfrentan a dos problemas: el inductivo y el deductivo (el inductivo ocurre cuando dados algunos elementos de la elipse se determina su expresión algebraica, y el deductivo se da cuando teniendo la expresión algebraica se solicita representarla gráficamente identificando sus elementos) (Velázquez, 2013). Otros problemas, según Pérez (2011) se presentan en la enseñanza de la geometría analítica la cual se enfoca al trabajo con expresiones analíticas o algebraicas prescindiendo de la parte gráfica, la cual se considera fundamental para la conceptualización del objeto de una forma significativa.

Bajo los anteriores supuestos, la investigación se sustenta en el diseño, aplicación y análisis de una secuencia didáctica fundamentada en los principios de la teoría de los registros de representación semiótica de Duval (1999), orientada al estudio de la elipse y mediada por el software Geogebra.

El trabajo se implementó en estudiantes de grado 10° de una institución educativa privada de la ciudad de Tunja (Boyacá) y la secuencia se diseñó según el marco teórico de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval (1999) y la Teoría de las situaciones Didácticas de Brousseau (2007); en lo referente al diseño de las situaciones problema, estas tenían como fin llevar a los estudiantes a la comprensión de la sección cónica elipse.

La metodología usada en la investigación es la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995). Se eligió esta metodología ya que está inmersa en el campo de la educación matemática y permite el estudio de situaciones de aprendizaje y enseñanza por medio de un contraste entre un análisis a priori y otro a posteriori.

Una contribución importante que surge de la investigación fue el llegar a observar y analizar el impacto que tienen los ambientes de geometría dinámica en el estudio de objetos de geometría analítica, ya que esto posibilitó a los estudiantes a observar en gran detalle algunas propiedades geométricas que no se pueden apreciar con lápiz y papel. Por último, se observó que a través de estas actividades los estudiantes pueden construir su propio conocimiento a través de herramientas que ofrecen las TIC desde un enfoque diferente al tradicional.

MARCO TEÓRICO

Teoría de los Registros de Representación Semiótica

La investigación se basó en la teoría de los registros de representación semiótica de Duval

(1999), donde se afirma que es fundamental utilizar gran variedad de registros ya que se toma en consideración que la coordinación de dichos registros es primordial para la aprehensión de los objetos matemáticos. Los conceptos matemáticos al ser objetos ideales, necesitan ser representados mediante representaciones semióticas, las cuales pueden ser de tipo gráfico, numérico, tabulares o pictóricas (Duval, 1999).

Según Duval (1999), los sistemas de representación semiótica tales como el gráfico, algebraico, pictórico o lenguaje natural se catalogan como *registros de representación semiótica* cuando estos cumplen de tres características cognitivas referentes a las representaciones. La primera característica comprende elaborar un conjunto de símbolos mediante los cuales se pueda representar un objeto en un determinado sistema. La segunda actividad (tratamiento) se encarga de transformar las representaciones del objeto matemático usando propiedades que posea el sistema en el cual se encuentra representado, esto con el objetivo de generar nuevas representaciones para tener un aprendizaje significativo. La última actividad (conversión), tiene como propósito convertir las representaciones en las cuales se encuentra el objeto matemático de un sistema a otro, es decir, si el objeto se encuentra representado en el registro algebraico, entonces se transforma a un registro gráfico, de lengua natural o pictórico (Olivares, 2018).

En la enseñanza y aprendizaje de las secciones cónicas como la elipse, se utilizan registros de representación semiótica tales como el algebraico, de lengua natural y el gráfico. Según Duval (1999), en el lenguaje gráfico se emplea con frecuencia el plano cartesiano y determinadas figuras geométricas, esto con el fin de visualizar los conceptos dados en un lenguaje formal o de lenguaje natural. En cuanto al lenguaje natural, se dice que es aquel donde se utiliza la sintaxis y la gramática propias de cada idioma para expresar los conceptos matemáticos. Finalmente, Olivares (2018), afirma que el lenguaje algebraico es aquel donde la escritura es de tipo formal y simbólica, es decir, que en dicho registro se utilizan determinadas reglas del álgebra (factorización, reducción de términos semejantes, productos notables, etc.) para expresar un determinado objeto matemático.

TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS

En esta teoría el proceso de enseñanza se focaliza en adquirir conocimientos matemáticos por medio del diseño de secuencias de clase, las cuales son elaboradas por el profesor, con el objetivo de disponer de un medio para realizar el proceso de enseñanza y aprendizaje de un determinado objeto matemático (Figueroa, 2013). La teoría de las situaciones didácticas de Brousseau (2007) plantea una clasificación de las situaciones didácticas, tales como:

Situación de Acción: Se fundamenta en el trabajo individual del estudiante, en un determinado problema, partiendo de unos conocimientos previos relacionados con el objeto en estudio para llegar a la construcción del conocimiento (Figueroa, 2013).

Situación de Formulación: Esta situación se basa en el trabajo en equipo, ya que es imprescindible que los alumnos intercambien conocimientos para la conceptualización de los objetos matemáticos (Silva, 2017).

Situación de Validación: Después de haberse comunicado de forma individual e interactuar con el medio, los estudiantes validan el trabajo elaborado y proceden a razonar con el profesor acerca del conocimiento producido con el fin de garantizar que está bien elaborado (Chavarría, 2006).

Institucionalización: Es la etapa final en la cual se formaliza el conocimiento trabajado por los alumnos (Figueroa, 2013).

METODOLOGÍA

Para la presente investigación se sigue como marco metodológico a la ingeniería didáctica de Artigué (1995), puesto que esta se desenvuelve dentro del ámbito de la educación matemática y, además, posibilita la validación de la información a través de un análisis a priori (lo proyectado) y un análisis a posteriori (lo sucedido). La ingeniería didáctica (Artigué, 1995) posibilita el análisis de los procesos que llevan a cabo los estudiantes para comprender el objeto matemático/geométrica elipse, esto se realiza por medio del diseño de una secuencia didáctica con la ayuda de GeoGebra y apoyada en los fundamentos de la teoría de los registros de representación semiótica de Duval (1999). En cuanto al diseño de la investigación, se tienen en cuenta las cuatro fases propuestas por Artigué (1995) en su ingeniería didáctica; dichas fases corresponden al análisis preliminar, análisis a priori, experimentación y por último un análisis a posteriori y validación. En lo referente a los análisis preliminares, se estudia la parte epistemológica, didáctica y cognitiva para el objeto elipse, en el análisis a priori se diseña la secuencia didáctica para el trabajo de los estudiantes y se hace el análisis a las respuestas que se espera respondan los estudiantes. En la fase de experimentación se pone en marcha lo propuesto en el análisis a priori de la segunda fase. Finalmente, en el análisis a posteriori y la validación, se realiza un análisis o comparación entre los resultados del análisis a priori y el a posteriori.

RESULTADOS

Teniendo en cuenta la Teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval (1999) y la metodología de la Ingeniería Didáctica de Artigué (1995), en el análisis a priori se diseñaron secuencias didácticas sustentadas por el software GeoGebra, con las cuales se esperaba que los estudiantes de grado décimo llegaran a comprender el objeto elipse a través de la coordinación de los registros gráfico, algebraico, de lengua natural y pictórico. Previo al desarrollo de las situaciones didácticas se realizó una prueba diagnóstica, con el propósito de identificar y afianzar algunos de los conceptos previos de geometría analítica, con el fin de conceptualizar el objeto de estudio.

Las secuencias didácticas se desarrollaron en 4 sesiones, cada una de ellas con una duración cercana a los 60 minutos. Las situaciones didácticas se centraron en dos aspectos: la condición geométrica de la elipse por medio de conversiones y transformaciones en los registros de representación pictórico y de lenguaje natural. El segundo aspecto se enfoca también en la conversión y tratamiento, pero esta vez en los registros de representación gráfico y algebraico.

En esta prueba diagnóstica se observaron ciertas dificultades en el dominio de temáticas tales como: definición en lenguaje verbal, pictórico, gráfico o algebraico sobre las secciones cónicas. En las siguientes figuras 1,2 y 3 se observan las respuestas obtenidas de los estudiantes participantes de la investigación en la prueba.

¿Qué condición geométrica tienen que cumplir los puntos B y C para que estén en la circunferencia, cuyo centro es el punto A y tiene radio r?

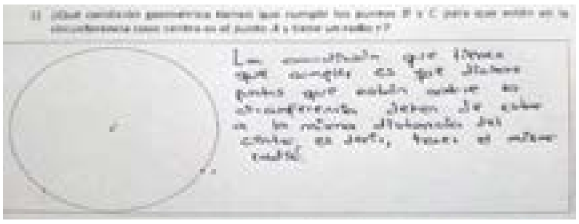

Figura 1. Estudiante 1

Teniendo en cuenta la siguiente circunferencia donde su centro está ubicado en el punto P (4,3) y su radio equivale a 3 unidades ¿Cuál es la ecuación cónica y ecuación general de dicha circunferencia?

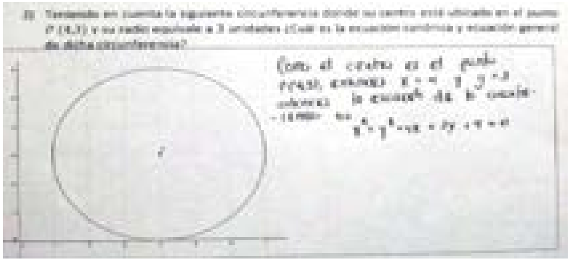

Figura 2. Estudiante 3

Dada la siguiente ecuación de la circunferencia determinar sus elementos característicos (centro y radio)

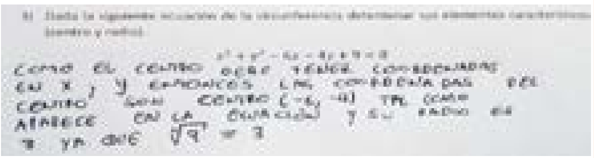

Figura 3. Estudiante 2

Con la prueba diagnóstica se pudo observar que los estudiantes no estaban en capacidad de establecer o llegar a la ecuación canónica de la circunferencia dado el centro y el radio y realizando las respectivas transformaciones en el registro algebraico. La anterior situación es posible que se dé, debido a que hay un limitado manejo del registro de representación algebraico, tal y como lo expone Duval (1999).

Seguido a la prueba diagnóstica se procede a realizar la actividad 1 denominada: *Condición Geométrica de la Elipse*, la cual tiene el propósito que los estudiantes conceptualicen la condición geométrica de la curva a través del tratamiento y conversión entre los registros pictórico y de lengua natural.

A continuación, en la Figura 4, se presenta el trabajo desarrollado por algunos de los estudiantes, señalando el análisis a priori y a posteriori. En el anexo 1 se enseña la actividad 1 a desarrollar por los estudiantes.

Respecto al ítem (1i), se esperaba a priori que los estudiantes respondieran que los segmentos de recta $\overline{QA}$ y $\overline{AP}$ t tienen la misma medida debido a que los triángulos QFA y PFA son congruentes. Otro posible razonamiento es que observen que el triángulo APQ es un triángulo isósceles y por tanto los lados QA y AP son congruentes. En este punto los estudiantes determinaron que los segmentos de recta $\overline{AP}$ y $\overline{QA}$ tienen la misma medida, fundamentados en el concepto de triángulos isósceles y mediatriz de un segmento. Dichas afirmaciones se pueden apreciar en la figura 4:

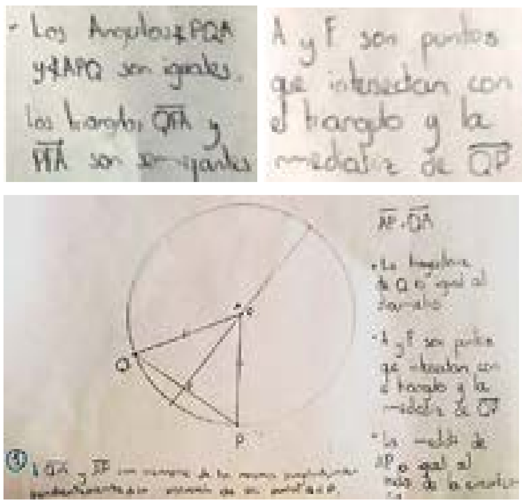

Figura 4. Solución ítem 1i de la actividad 1a. Estudiante 4

Se puede observar, en el trabajo del estudiante E4 del grupo 1 realizó una conversión de la representación pictórica del triángulo a una en lengua natural, lo cual evidencia que se coordinan los mencionados registros de representación semiótica.

En relación al punto 1ii) los estudiantes del grupo 1 respondieron tal y como se esperaba según el análisis a priori, esto es, que al sumar los segmentos de recta $\overline{AP}$ y $\overline{QA}$ el resultado es congruente con el radio de la circunferencia, tal y como se muestra en la figura 5a, sin embargo en el grupo 2 a pesar de que logran evidenciar una conversión del registro de representación pictórico al de lenguaje natural al realizar transformaciones primeramente en el registro pictórico como se muestre en la figura 5b, los estudiantes se limitan a describir lo que sucede con la construcción.

Seguidamente, en el ítem 2i, los estudiantes de los 2 grupos lograron conceptualizar lo plasmado en el análisis a priori, es decir, que sin importar el tamaño y la forma de la curva, al sumar la longitud de los segmentos de recta $\overline{QA}$ y $\overline{AC}$ siempre el resultado es constante. Para llegar a la conjetura anterior, los estudiantes llevaron a cabo variadas transformaciones de la elipse en el registro pictórico, tal y como se ilustra en las figuras 5a y 5b.

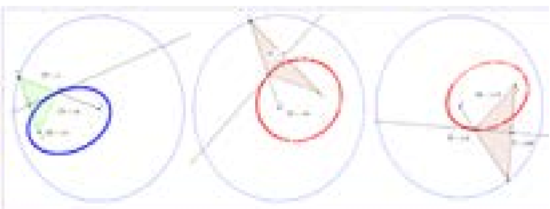

Figura 5a. Grupo 1, actividad 1a (GeoGebra)

Figura 5b. Grupo 2, actividad 1a (GeoGebra)

En relación a los puntos 3i y 3ii, se pretendía que los estudiantes observaran que independiente de las transformaciones que se le aplicaran a la curva en el registro pictórico, la suma de los segmentos de recta $\overline{QA}$ y $\overline{AC}$ era congruente con la medida del radio de la circunferencia y también con el segmento de recta $\overline{FG}$.

En la Figura 6, se observa que coordinaron los registros de representación de lengua natural y pictórico en la solución de los puntos 3i y 3ii.

Figura 6 (Elaboración grupo 1)

Para terminar, en el ítem 3iii), los estudiantes definieron la cónica teniendo en cuenta conocimientos previos que, según ellos, observaron en libros de matemáticas y no expresaron la elipse como se esperaba en el análisis a priori (según la condición geométrica), esto es, que la elipse es el lugar geométrico de los puntos cuya suma a dos puntos fijos llamados focos es constante e igual a la longitud del segmento de recta $\overline{FG}$. La respuesta expresada por el estudiante E4 se consigna en la figura 7.

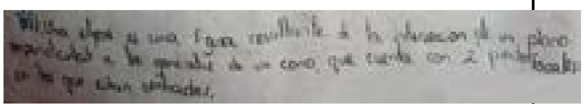

Figura 7. Estudiante 4

Al finalizar la actividad 1 denominada *Condición Geométrica de la Elipse*, se formalizó la concepción geométrica de la cónica. Posteriormente se formalizaron los elementos que hacen parte de la representación gráfica de la elipse, tales como: eje menor, eje mayor y eje focal. Después de precisar los anteriores elementos se prosiguió a trabajar la actividad 2 llamada: *Representación de la elipse en el registro gráfico y algebraico*, la cual tenía como fin conceptualizar el objeto matemático elipse al coordinar los registros de representación gráfico y algebraico: en palabras de Duval (1996), la comprensión de un concepto matemático ocurre cuando existe la conversión de la representación de un objeto matemático de un registro a otro.

Se presenta en el anexo 2 el trabajo propuesto para los estudiantes del grupo 1 mencionando en seguida tanto el análisis a priori y a posteriori.

Respecto al punto 1, se esperaba que los estudiantes realizaran tratamientos de la curva en el registro gráfico, y observaran que a medida que la longitud del eje focal se aproxima a la longitud del eje mayor entonces la curva va teniendo determinados cambios, esto es, cuando las longitudes de dichos ejes son casi la misma, entonces la elipse se va tornando achatada. Por otro lado, si la longitud del eje focal tiende a cero, entonces la elipse se va tornando de forma circular. También se esperaba, según el análisis a priori, que los estudiantes llegaran a expresar estos cambios que tiene la curva en forma matemática. Lo expresado por los estudiantes respecto al punto 1 se observar en la Figura 8.

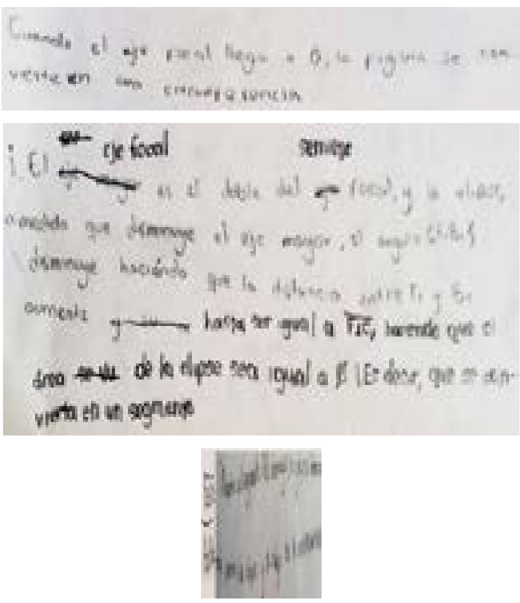

Figura 8. Solución punto 1 de la actividad II Estudiante 4

En este punto, afirmaron que a medida que disminuye la longitud del eje mayor entonces el segmento de recta $\overline{F_1B_1}$ va a ser congruente con el segmento de recta $\overline{F_1C}$ lo que lleva a que la elipse se transforme en un segmento. Posteriormente expresan la relación matemática como la división entre la longitud del eje focal (F_1F_2) y el eje mayor (A_1A_2), como se proyectó en el análisis a priori (figura 8).

En cuanto al punto 2, se esperaba que los estudiantes (a priori) determinaran que la longitud del segmento de recta $\overline{F_1B_1}$ es congruente con la medida del semieje mayor, y, que, al realizar transformaciones de la elipse en el registro de representación gráfico, observaran que el segmento de recta corresponde a la hipotenusa del triángulo rectángulo F_1B_1C y que el semieje focal y semieje menor corresponden a los catetos de dicho triángulo. La respuesta dada por los estudiantes se detalla en la figura 11 que se relaciona a continuación.

Figura 9. *Solución punto 2 de la actividad II*

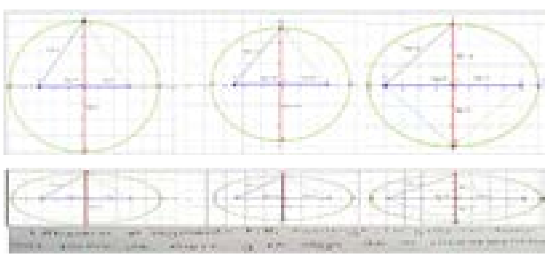

Figura 9. Elaboración Grupo 1

Como se observa en la figura 9, la respuesta dada por los estudiantes no corresponde con lo establecido en el análisis a priori, es decir, no lograron determinar que la longitud del segmento de recta $\overline{F_1B_1}$ era congruente con la longitud del semieje mayor. No obstante, señalaron que, al movilizar las variables didácticas, siempre se configuran triángulos rectángulos (tal y como se esperaba según el análisis a priori), en donde los semiejes focal y menor corresponden a los catetos y el segmento $\overline{F_1B_1}$ a la hipotenusa. Para determinar dicha afirmación, los estudiantes realizaron transformaciones en el registro gráfico de la elipse, tal y como se muestra en la figura 9 la cual fue extraída de los archivos de Geogebra de los estudiantes.

En relación al punto 3 (a priori), se esperaba que teniendo como base la representación gráfica de la elipse y su condición geométrica, realizaran la conversión del registro de representación gráfico al algebraico (ecuación general de la elipse). Seguidamente, se esperaba que efectuando tratamientos dentro del registro algebraico llegaran a la siguiente expresión de la elipse (ecuación canónica): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Se puede observar en la Figura 10, la representación gráfica de la curva sobre la cual los estudiantes se fundamentaron para realizar la conversión al registro de representación algebraica.

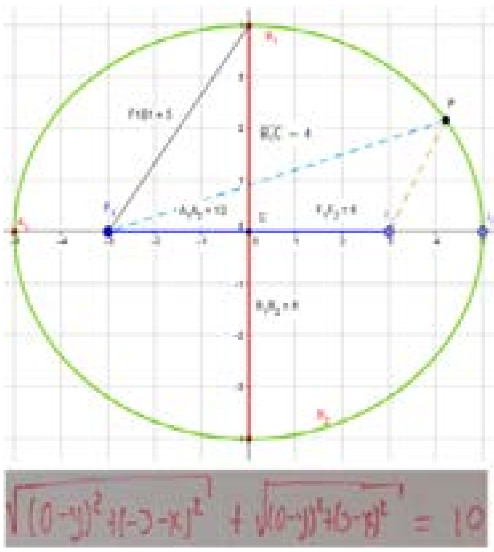

Figura 10. Representación Gráfica de la Elipse. Grupo 1

Según la figura 10, los estudiantes efectuaron una conversión del registro gráfico al algebraico teniendo como cimientos conceptos tales como: distancia entre dos puntos, condición geométrica de la elipse y manejo del álgebra. En la figura 11 se observa la conversión desarrollada por los estudiantes del registro gráfico (figura 10) al registro algebraico, para posteriormente por medio de tratamientos en este último registro, obtener la ecuación canónica de la elipse.

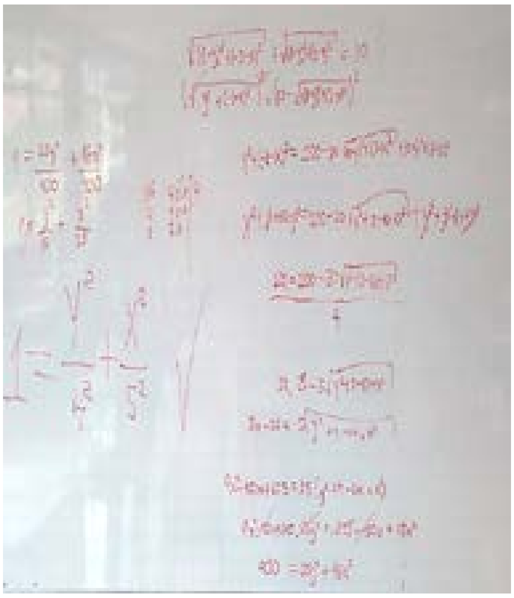

Figura 11. Grupo 1, actividad II - Registro Algebraico

Como se ilustra en la figura 13, se llevó a cabo una conversión del registro gráfico de la elipse a un registro algebraico, esto fundamentado en la condición geométrica y la distancia entre dos puntos para conseguir la siguiente expresión:

$$\sqrt{(0-y)^2+(-3-x)^2}+\sqrt{(0-y)^2+(3-x)^2}=10.$$

Luego de obtener la representación del objeto matemático elipse en el registro algebraico, efectuaron tratamientos dentro de este mismo registro para llegar a tener la ecuación canónica de la elipse ($\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$), tal y como se proyectó en el análisis a priori.

Por último, en el punto $4i$, los estudiantes contestaron que la longitud del eje menor corresponde a 4 unidades (el cual pertenece al segmento $\overline{CB_1}$), la medida del eje mayor era de

· 265 ·

5 unidades (el cual corresponde a la hipotenusa del triángulo F_1CB_1). Se observa que se llevó a cabo medianamente lo planeado en el análisis a priori, en otras palabras, mezclaron los términos eje con semieje (pese a haberse precisado y discernido los dos conceptos en la actividad anterior); asimismo, no se alcanzó a establecer la correspondencia entre los semiejes mayor, focal y menor con el teorema de Pitágoras (posiblemente no hicieron alusión, puesto que en el punto 2ii de la actividad II ya se habían referido a dichos segmentos de recta). En la figura 12 se puede detallar lo hecho por los estudiantes.

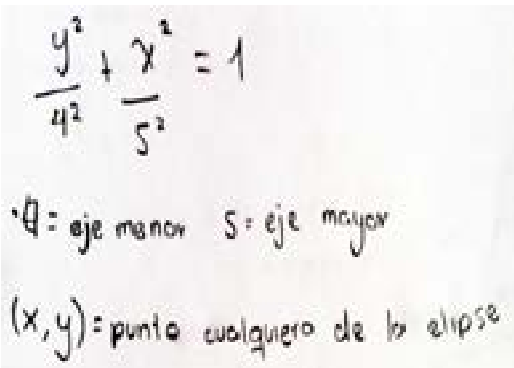

Figura 12. Respuesta al ítem 4i de la actividad II Estudiante 4

Por último, se observó que los estudiantes comprendieron el objeto elipse al conseguir coordinar los registros de representación algebraico y gráfico, e igualmente coordinando el registro algebraico con el de lengua natural al interpretar la relación existente entre los elementos que componen la representación gráfica con la algebraica según el diseño de situaciones problemas.

CONCLUSIONES

Por medio del diseño de situaciones didácticas, los estudiantes conceptualizaron el objeto matemático, teniendo como fundamento los conocimientos previos y el uso de los diferentes registros de representación semiótica en los cuales se puede representar la elipse.

Igualmente, la construcción de la curva utilizando el ambiente de geometría dinámica Geogebra fue relevante, ya que, los estudiantes lograron observar en detalle propiedades de la elipse que les permitieron conceptualizarla, propiedades que con lápiz y papel no se pueden estudiar debido a que se genera una limitada visión del objeto matemático porque no es posible manipularlo, y, por lo tanto, se tienen dificultades para generar una conexión entre la teoría y la representación (Sandoval, 2009).

Por último, se observa que por medio de las representaciones semióticas se pudo construir y conceptualizar el objeto matemático elipse, tanto en su condición geométrica como algebraica, al coordinar los registros de representación pictórico, lengua natural, gráfico y algebraico.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gomez, P. (1995). *Ingenieria didactica en educacion matematica: un esquema para la investigacion y la innovacion en la enseñanza y el aprendizaje de las matematicas*. Grupo editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. (Vol. 7). Libros del Zorzal.

Chavarría, J. (2006). Teoría de las situaciones didácticas. *Cuadernos*, *2*, 1-10

Duval, R. (1999). Registros de representación comprensión y aprendizaje. En, *Semiosis y pensamiento humano* (*pp. 25-80*). La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168.

Figueroa, R. (2013). *Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables: una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la teoría de situaciones didácticas* [tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. http://hdl.handle.net/20.500.12404/4736

Olivares, E. (2018). *Coordinación de diferentes registros de representación semiótica para movilizar la noción de elipse en estudiantes de física* [tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. http://hdl.handle.net/20.500.12404/12989

Pérez, R. (2011). *Una propuesta de enseñanza aprendizaje para la construcción y aplicación de las cónicas* [tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio Institucional UN. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/8094

Sandoval, I. (2009). La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación matemática*, *21*(1), 5-27.

Silva, A. (2017). *Propuesta didáctica*

para el fortalecimiento del aprendizaje de los números racionales en el grado 601 del Colegio Miguel Antonio Caro IED JM a través de la teoría de las situaciones didácticas [tesis de maestría, Universidad Libre]. https://hdl.handle.net/10901/10270

Velázquez, N., Castellanos, J. (2013). *El modelo de van hiele aplicado en el proceso de enseñanza de secciones cónicas apoyado con geogebra.* Monterrey: XI Congreso Nacional de investigación educativa.**Anexos**

Anexo 1. *Actividad 1: Condición Geométrica de la Elipse.*

1. Abra el archivo denominado "Actividad 1a"

   Explore la construcción geométrica moviendo el punto P sobre la circunferencia y el punto Q movilícelo al interior de la circunferencia. Se sugiere que transforme la construcción moviendo dichos puntos al menos tres veces.

   Anote las observaciones hechas sobre las modificaciones que hizo en la construcción.

   Teniendo en cuenta las modificaciones hechas a la construcción responda las siguientes preguntas:

   i. ¿Qué relación puede establecer entre los segmentos de recta $\overline{QA}$ y $\overline{AP}$?
   ii. ¿Qué relación existe entre los segmentos de recta $\overline{QA}$, $\overline{AC}$ y la circunferencia?

2. Movilice el punto Q a cualquier parte al interior de la circunferencia. Después active la opción "rastro" sobre el punto A. Finalmente mueva el punto P sobre la circunferencia. Se sugiere como mínimo realizar este procedimiento tres veces. (Nota: antes de cambiar de posición al punto Q desactive la opción "rastro" al punto A)

   i. Teniendo en cuenta las movilizaciones realizadas ¿Qué relación existe entre los puntos que conforman la figura obtenida y los segmentos $\overline{QA}$ y $\overline{AC}$?

3. Abra el archivo denominado "Actividad 1b"
   Analice la construcción geométrica haciendo variar el radio de la circunferencia y cambiando de posición el punto Q. Después active la opción "rastro" sobre el punto A. Para terminar, movilice el punto P sobre la circunferencia.

   i. Con base en lo observado ¿Qué relación puede concluir entre los segmentos $\overline{QA}$ y $\overline{AC}$, el radio de la circunferencia y la figura formada por el arrastre del punto A?

   Utilice la herramienta Elipse y construya la curva que pasa por los puntos Q, C y A. Después intercepte la recta que pasa por los puntos Q y C con la figura obtenida. Finalmente determine la longitud del segmento de recta $\overline{FG}$.
   Ahora explore la construcción geométrica movilizando el punto P, el punto interior Q y el radio de la circunferencia.
   Teniendo en cuenta lo observado:

   ii. ¿Qué relación existe entre los segmentos $\overline{QA}$, $\overline{AC}$, el radio de la circunferencia y el segmento $\overline{FG}$?
   iii. De acuerdo con lo observado ¿Cómo define la elipse?

Anexo 2. *Actividad 2: Representación de la elipse en el registro gráfico y algebraico*

Actividad 2: Representación Algebraica y Gráfica

1. Abra el archivo denominado "Actividad II"

   Explore la construcción geométrica cambiando la longitud del eje focal mediante el deslizador "Eje Focal". Se sugiere que transforme la construcción al menos tres veces.

   Anote las observaciones hechas sobre las modificaciones que hizo en la construcción.

   Teniendo en cuenta las modificaciones hechas a la construcción responda las siguientes preguntas:

   i. ¿Qué relación puede establecer entre la forma que toma la elipse, el eje focal y el eje mayor?
   ii. Matemáticamente ¿Cómo puede expresar dicha relación?

2. Analice la construcción cambiando la longitud de los ejes focal y mayor por medio de los deslizadores "Eje Focal" y "Eje Mayor" respectivamente.

   i. Teniendo en cuenta las movilizaciones realizadas ¿Observa alguna relación con respecto a la longitud del segmento $\overline{F_1B_1}$?
   ii. Ubique el punto P sobre el punto B_1 o B_2. Ahora vuelva a explorar la construcción haciendo variar la longitud de los ejes mayor y focal ¿Qué relación puede establecer entre los semiejes mayor, menor y focal?

3. Movilice el punto F_2 entre los valores 3 o 4 y fije el punto A_2 en el valor de 5. Finalmente ubique el punto P sobre cualquier punto de la elipse.

   i. Determine una expresión que describa la curva teniendo en cuenta la condición geométrica de la elipse
   ii. Exprese el resultado obtenido en el paso (3*i*) en la siguiente forma canónica:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

4. Teniendo en cuenta el resultado obtenido en (3*ii*)

   i. ¿Qué relación puede establecer con respecto a la representación gráfica de la elipse dada en el punto 3?