RECIBIDO EL 13 DE SEPTIEMBRE DE 2021 - ACEPTADO EL 13 DE DICIEMBRE DE 2021

EL CONCEPTO INFINITESIMAL EN EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO

THE INFINITESIMAL CONCEPT IN THE LEARNING OF CALCULUS

Mawency Vergel Ortega[1]

Henry de Jesús Gallardo Pérez[2]

Daniel Villamizar Jaimes[3]

RESUMEN

La investigación sigue un enfoque cuantitativo de corte transversal, explicativa y correlacional enmarcada en un enfoque multimétodo. Objetivo: Aplicar una estrategia pedagógica basada en el estudio de la geometría fractal para desarrollar tanto el pensamiento matemático como lograr una mejor comprensión y aprendizaje del cálculo diferencial e integral. Materiales y métodos: estudio explicativo, multivariado, correlacional y cuasi experimental. El muestreo se realiza de forma probabilística y aleatoria, iniciando con estratificación por programa académico y luego seleccionando conglomerados de estudiantes conformados por los matriculados en cursos de cálculo en cada programa. Resultados: los datos primarios para la investigación se obtienen de la aplicación de test pre y post a la intervención pedagógica para valorar el desarrollo del pensamiento matemático y el desempeño académico en cálculo, se comparan resultados y evalúan diferencias para estimar la contribución que efectivamente aporta el estudio y comprensión del concepto infinitesimal. Conclusión: se encuentra que existe relación positiva entre la comprensión del concepto infinitesimal, el desarrollo del pensamiento matemático y el desempeño académico de los estudiantes en los cursos de cálculo diferencial e integral.

1 Posdoctora en Investigación en Ciencias Sociales, Niñez y Juventud, mawency@ufps.edu.co, Orcid: 0000-0001- 8285-2968, Docente-Investigadora. Universidad Francisco de Paula Santander, Cúcuta – Colombia.

2 Doctor en Educación, henrygallardo@ufps.edu.co, Orcid: 0000-0002-8239-1345, Docente Investigador. Universidad Francisco de Paula Santander. Cúcuta – Colombia.

3 Magister en Psicopedagogía Clínica, danielvj@ufps.edu.co, Orcid: 0000-0003-3374-5159, Docente Investigador. Universidad Francisco de Paula Santander. Cúcuta – Colombia.

REVISTA BOLETÍN REDIPE 10 (13): 432-442 - DICIEMBRE 2021 - ISSN 2256-1536

PALABRAS CLAVE: pensamiento matemático, análisis de datos, geometría fractal, teoría de respuesta al ítem.

ABSTRACT

Introduction: The research follows a quantitative cross-sectional, explanatory and correlational approach framed in a multimethod approach. Objective: To apply a pedagogical strategy based on the study of fractal geometry to develop mathematical thinking and to achieve a better understanding and learning of differential and integral calculus. Materials and methods: explanatory, multivariate, correlational and quasi-experimental study. Sampling was performed probabilistically and randomly, starting with stratification by academic program and then selecting student clusters made up of those enrolled in calculus courses in each program. Results: the primary data for the research are obtained from the application of pre and posttests to the pedagogical intervention to assess the development of mathematical thinking and academic performance in calculus, results are compared and differences are evaluated to estimate the contribution that the study and understanding of the infinitesimal concept effectively contributes. Conclusion: it is found that there is a positive relationship between the understanding of the infinitesimal concept, the development of mathematical thinking and the academic performance of students in differential and integral calculus courses.

KEYWORDS: mathematical thinking, data analysis, fractal geometry, item response theory.

1. INTRODUCCIÓN

El pensamiento matemático está relacionado con ser competente matemáticamente, se basa en el desarrollo y la existencia de los cinco tipos de pensamiento matemático: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional y se refiere al desarrollo de habilidades que permiten comparar, describir, analizar, sintetizar, abstraer y modelar diferentes fenómenos [1,2]; es en sí mismo la representación de la relación entre la realidad y las matemáticas, que sitúa a las matemáticas como el lenguaje o la herramienta que permite la caracterización de los diferentes fenómenos mediante el uso de algoritmos que caracterizan el lenguaje de las matemáticas como una estrategia que permite la construcción, interpretación, abstracción y consolidación de significados para el profesor y el estudiante [3]. Puede interpretarse como una reflexión espontánea realizada sobre la naturaleza de su conocimiento y sobre la naturaleza del proceso de descubrimiento e invención en matemáticas [4] que se manifiesta en un dominio de tareas que involucran recordar, comprender, aprender, resolver problemas, inducir reglas, definir conceptos, percibir y reconocer estímulos [5]

En este mismo sentido, se puede abordar el conocimiento matemático constituido por el conocimiento conceptual que está relacionado con la reflexión, es de carácter teórico y declarativo, es producido por la actividad cognitiva y establece relaciones entre sus componentes y con otros conocimientos, y el conocimiento procedimental relacionado con la acción y con las técnicas y las estrategias para representar conceptos y para transformar dichas representaciones; con las habilidades y destrezas para elaborar, comparar y ejercitar algoritmos y para argumentar convincentemente [6].

Por otra parte, los esquemas conceptuales en los estudiantes de cálculo refieren al infinitesimal asociado a una cantidad variable, a un número real, a un valor numérico de una variable que tiende a cero, un diferencial, una porción de un objeto a estudiar, un momento de tiempo, una distancia muy pequeña, un cambio muy pequeño de una variable, una diferencia muy pequeña entre dos números reales, algo insignificante, es épsilon, una cantidad infinitamente pequeña,

REVISTA BOLETÍN REDIPE 10 (13): 432-442 - DICIEMBRE 2021 - ISSN 2256-1536

algo muy pequeño que si se suma o resta a algo no afecta el resultado, algo tan pequeño que se podría aproximar a cero [7], así, se debe enfatizar en el proceso de síntesis, que facilita el proceso de intuición, para dar lugar más adelante al proceso de análisis que realiza el estudiante con el acompañamiento del profesor [8]

Leibniz concibe la curva como un polígono compuesto por un número infinitamente grande de lados y considera la integración como una especie de suma de polígonos estableciendo la relación entre integración y derivación como operaciones inversas y recíprocas; en tanto, Newton reduce las demostraciones de las proposiciones a las primeras y últimas sumas y razones de cantidades nacientes y evanescentes, es decir, a los límites de esas sumas y razones [9]. Así, Newton se basa en una concepción cinemática de las curvas y su generación describiendo los procesos temporales y dinámicos subyacentes a los fenómenos físicos mientras que Leibniz es algebraico basado en sus estudios de filosofía y lógica sobre combinatoria y matemáticas. Con respecto al infinitesimal, Leibniz argumenta que es una cantidad que se puede hacer siempre más pequeña que una cantidad dada y considera el cálculo infinitesimal útil al aplicar la matemática a la física. Ambos abordan el cálculo basado en el uso de variables y no de funciones, Leibniz desde el cálculo infinitesimal y Newton desde el cálculo de fluxiones, sin llegar al concepto moderno de límite [10]

El concepto infinitesimal también es abordado desde el estudio de la geometría fractal en la que Mandelbrot considera un fractal como un objeto semigeométrico cuya estructura básica es fragmentada o irregular y se repite a diferentes escalas [11]; este elemento de la naturaleza puede ser descrito mediante la geometría fractal identificando en él una dimensión no entera y que puede superar a su dimensión topológica [12]. En la construcción del atractor de un fractal, el estudiante encuentra, desde el punto de vista de la geometría euclidiana, objetos conformados por fracciones de rectas y planos infinitesimales, curvas y superficies no diferenciables en todos sus puntos, sucesiones y series convergentes y divergentes, entre otras, y desde el punto de vista de la geometría fractal, objetos con dimensión fraccionaria que ocupan parte del plano o del espacio, según el caso [13,14].

La investigación pretende establecer una relación funcional existente entre el aprendizaje del cálculo con el nivel de desarrollo del pensamiento matemático y el conocimiento matemático procedimental al tiempo que busca establecer la contribución de la comprensión del concepto infinitesimal en el aprendizaje del cálculo. Se utiliza la geometría fractal para que el estudiante alcance una comprensión del concepto infinitesimal previo al abordaje del estudio del cálculo.

2. MATERIALES Y MÉTODOS

La investigación se enmarca en el paradigma cuantitativo, de corte transversal, explicativa y correlacional utiliza métodos estadísticos univariados y multivariados [15-18]. La población objeto de estudio está constituida por los estudiantes de ingeniería de la Universidad Francisco de Paula Santander de la ciudad de Cúcuta. El muestreo se realiza de forma probabilística y aleatoria, iniciando con estratificación por programa académico y luego seleccionando conglomerados de estudiantes conformados por los matriculados en cursos de cálculo en cada programa. Se trabaja con los docentes asignados y con los estudiantes de los grupos seleccionados. Los cursos seleccionados constituyen el grupo experimental y los resultados se comparan con los de los estudiantes matriculados en los cursos no seleccionados que constituyen el grupo control.

REVISTA BOLETÍN REDIPE 10 (13): 432-442 - DICIEMBRE 2021 - ISSN 2256-1536

El proceso se realiza en tres fases. La primera implica la capacitación de los docentes seleccionados con el fin de que ellos sean quienes realicen la intervención pedagógica, de esta forma se espera disminuir el sesgo generado por la presencia de personas externas al proceso de formación. La segunda fase inicia con la aplicación del test de entrada que permite valorar el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes, en una segunda etapa se desarrolla la intervención pedagógica en el grupo experimental realizando actividades de exploración de objetos en los que subyace el modelo fractal y la construcción de fractales lineales y no lineales junto con la descripción de sus propiedades algebraicas y geométricas, se estimula la creatividad y el trabajo colaborativo así como el uso de software libre para la generación de fractales en el ordenador [19,20]. En la tercera etapa se aplica un test de salida para comparar resultados con los obtenidos en el pre-test, también se aplica un test de comprensión y aplicación de conocimientos en cálculo para establecer comparaciones entre los grupos control y experimental. Cada test se diseñó y calificó utilizando teoría de respuesta al ítem [21-23] con estimación de parámetros mediante en el modelo de Rasch [24,25], de forma tal que los resultados permitan realizar comparaciones y valorar diferencias mediante la aplicación del análisis multivariado de datos.

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se elaboró y aplicó una prueba diagnóstica para evaluar el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes participantes en el estudio. La prueba se realizó con la metodología de la teoría de respuesta al ítem, que permite evaluar, para cada ítem, la posibilidad de adivinar la respuesta correcta, su dificultad y su capacidad de discriminación. El valor obtenido en la prueba es el valor acumulado de los puntajes obtenidos en cada uno de los ítems que la conforman. La figura 1 muestra las curvas características correspondientes al modelo de Rasch para el pre-test, desagregado para los grupos control y experimental. Se puede observar que, en ambos grupos, el test tiene grado de dificultad y capacidad de discriminación similar, con una ligera diferencia en la probabilidad de adivinación.

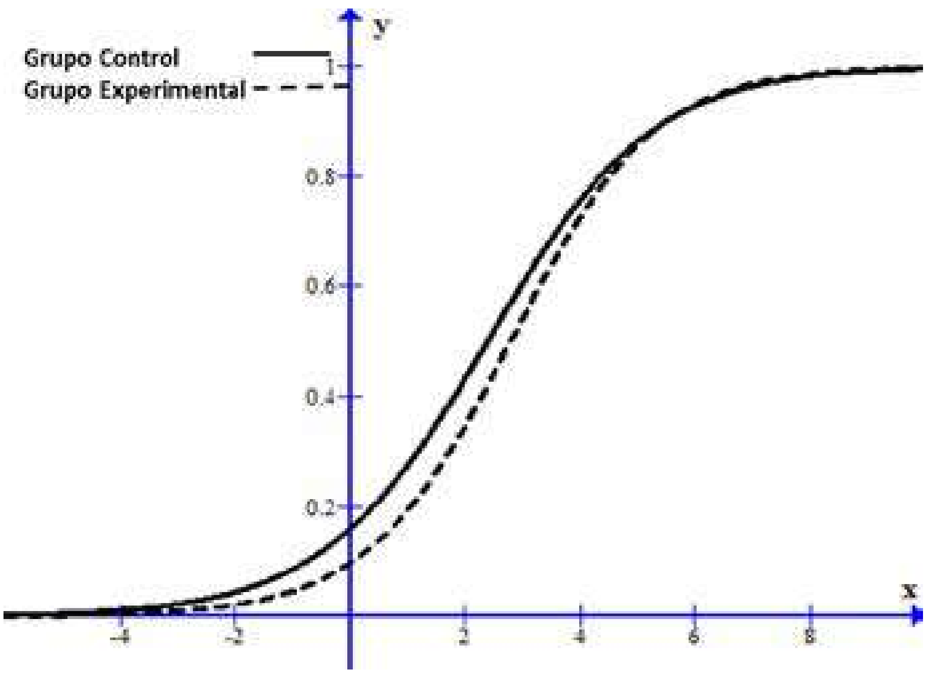

Figura 1. Curva característica para pre-test

REVISTA BOLETÍN REDIPE 10 (13): 432-442 - DICIEMBRE 2021 - ISSN 2256-1536

Las puntuaciones obtenidas en la prueba se ajustan en una escala de cero a cinco, donde cinco indica que contestó correctamente todos los ítems. En el grupo control se obtuvo una puntuación promedio de 2,65 con desviación estándar de 1,04 mientras que en el experimental el promedio fue de 2,60 con desviación estándar de 1,10. Se aplica prueba de Kolmogorv-Smirnov a los resultados de ambos grupos, encontrándose que se ajustan a distribuciones normales. La prueba de Levene aplicada a las varianzas arroja un valor F=0,022 con significancia bilateral de 0,88 indicando homocedasticidad en los dos grupos. Se comparan los resultados mediante una prueba para muestras independientes, la cual arroja un valor t=0,223 con significancia unilateral de 0,824, de donde se puede concluir que no existe diferencia significativa entre los grupos control y experimental para los resultados del pre-test. En la figura 2 se comparan los resultados en las dos pruebas, sin embargo, en ambos se detecta un bajo nivel de desarrollo del pensamiento matemático.

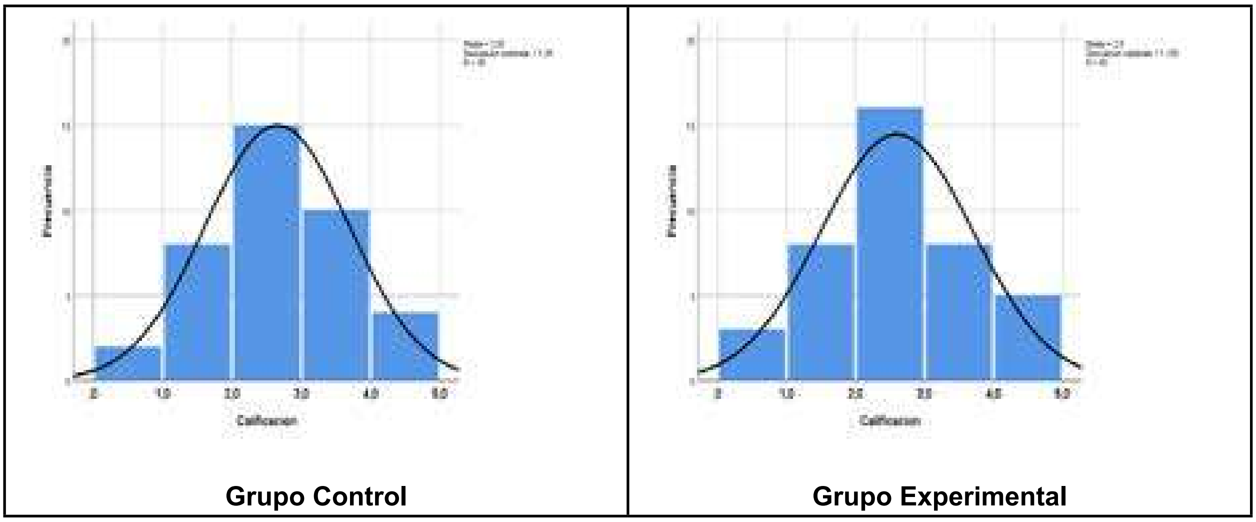

Figura 2. Distribución de resultados pre-test, grupos control y experimental

Los resultados obtenidos en el pre-test permiten continuar con la investigación, toda vez que no se encuentran diferencias significativas entre ambos grupos. En una segunda etapa de esta fase, se realiza intervención pedagógica con los estudiantes del grupo experimental, previa capacitación de los profesores. Con ellos se realiza trabajo de exploración de objetos en la naturaleza en los que subyace el modelo fractal. Los estudiantes trabajan en equipos colaborativos y, luego de realizar la búsqueda de objetos en la naturaleza e identificar las propiedades y el modelo fractal asociado, realizan socialización de resultados en la modalidad de simposios. También elaboran fractales lineales en dos y tres dimensiones, realizan las iteraciones posibles y describen el atractor identificando la presencia de elementos infinitesimales, o la forma como se puede llegar a ellos, en la estructura del fractal. Descubren con asombro que los fractales cumplen con una paradoja: su área o superficie es finita, es decir, tiene límites; pero, por el contrario, desde el punto de vista euclidiano, su perímetro o longitud es infinita, es decir, no tiene límites; también aplican diferentes escalas para medir la estructura de objetos fractales en la naturaleza. La propiedad de autosimilitud permite deducir que cada área de un fractal conserva de manera similar sus características globales repitiéndose los detalles periódicamente de una manera que tienden hacia al infinito; dicho de

REVISTA BOLETÍN REDIPE 10 (13): 432-442 - DICIEMBRE 2021 - ISSN 2256-1536

otra manera, cada porción del objeto tiene las mismas características del objeto completo, manteniendo una relación de las partes con el todo. El estudiante diferencia entre la dimensión fractal y la dimensión euclidiana, al tiempo que identifica líneas y superficies conformadas por componentes infinitesimales que conllevan a que su longitud o área deba ser aproximada por una serie matemática o que esté conformada por formas continuas diferenciables o no en todos sus puntos. Posteriormente se desarrollan estrategias pedagógicas similares, tanto en el grupo control como en el experimental, para el aprendizaje del cálculo diferencial e integral.

La tercera etapa de esta fase implica la realización de actividades tendientes a evaluar el aprendizaje del cálculo en los estudiantes junto con el desarrollo del pensamiento matemático; para ello se aplican dos test de salida o post-test. El diseño y contenido de los test se valora y ajusta mediante juicio de expertos y con base en resultados obtenidos en población paralela utilizando teoría de respuesta al ítem tanto para cada ítem como para el test en general. En la figura 3 se presentan las curvas características correspondientes en el modelo de Rasch para el post-test en los grupos control y experimental. Se puede observar que, en ambos grupos, el test tiene grado de dificultad y capacidad de discriminación similar, con una ligera diferencia en la probabilidad de adivinación. Sin embargo, al comparar con el pre-test, se encuentra que disminuye la probabilidad de adivinación en el grupo control, se mantiene el nivel de dificultad pero aumenta la capacidad de discriminación.

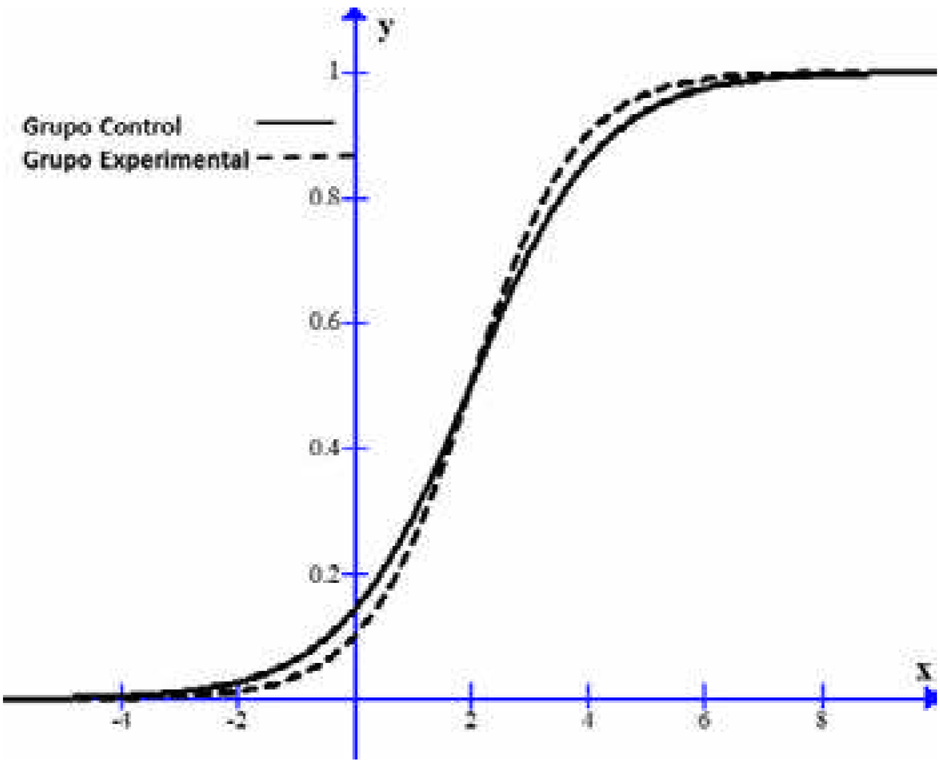

Figura 3. Curva característica para post-test

Las puntuaciones obtenidas en el post-test se ajustan en una escala de cero a cinco, donde cinco indica que contestó correctamente todos los ítems. En la figura 4 se presentan los histogramas correspondientes a los resultados en las dos pruebas, se aprecia un incremento en nivel de desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes del grupo experimental.

REVISTA BOLETÍN REDIPE 10 (13): 432-442 - DICIEMBRE 2021 - ISSN 2256-1536

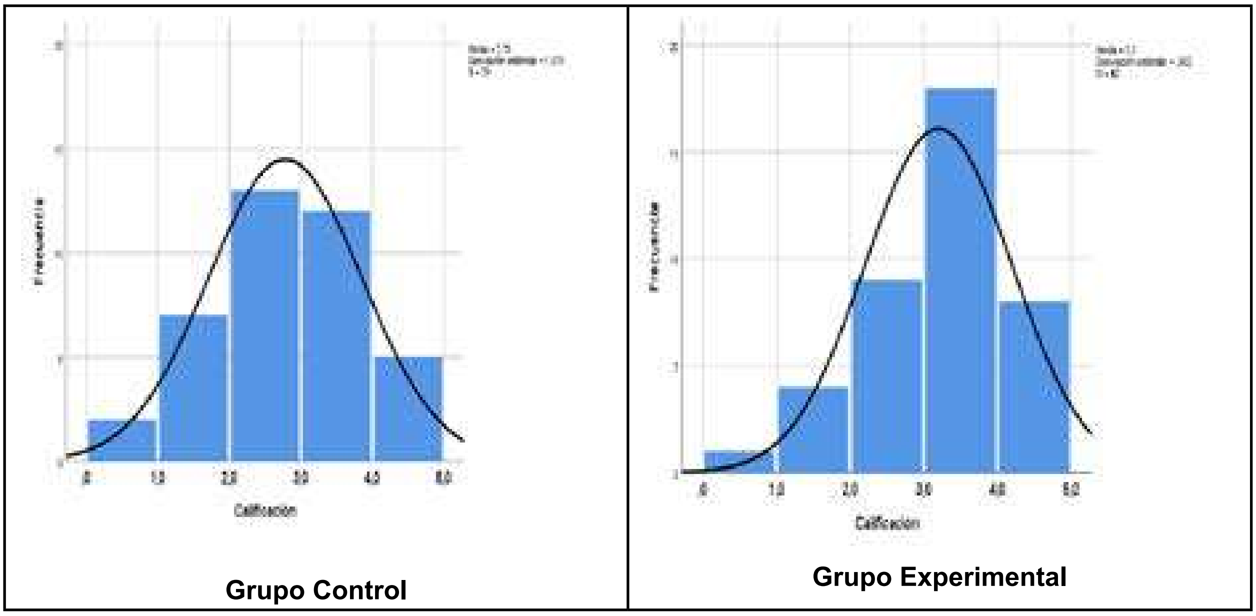

Figura 4. Distribución de resultados post-test, grupos control y experimental

En el grupo control se obtuvo una puntuación promedio de 2,78 con desviación estándar de 1,07 mientras que en el experimental el promedio fue de 3,20 con desviación estándar de 0,99. La prueba de Levene aplicada a las varianzas arroja un valor F=0,480 con significancia bilateral de 0,49 indicando homocedasticidad en los dos grupos. Se comparan los resultados mediante una prueba para muestras independientes, la cual arroja un valor t=2,596 con significancia unilateral de 0,005, lo cual constituye suficiente evidencia para concluir que existe diferencia significativa entre los grupos control y experimental en los resultados del post-test, indicando un aumento significativo en el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes del grupo experimental con respecto a los del grupo control.

Se aplica también una prueba de evaluación de conocimientos de cálculo diferencial e integral a los estudiantes de los cursos que conforman los dos grupos, el de control y el experimental. La prueba de Kolmogorv-Smirnov indica que los resultados no se pueden ajustar mediante distribuciones normales, por tanto se realiza prueba no paramétrica de Mann-Whitney para comparar las medianas en ambos casos. La figura 5 muestra los diagramas de caja correspondientes a los grupos control y experimental para los resultados de las evaluaciones en cálculo diferencial e integral.

REVISTA BOLETÍN REDIPE 10 (13): 432-442 - DICIEMBRE 2021 - ISSN 2256-1536

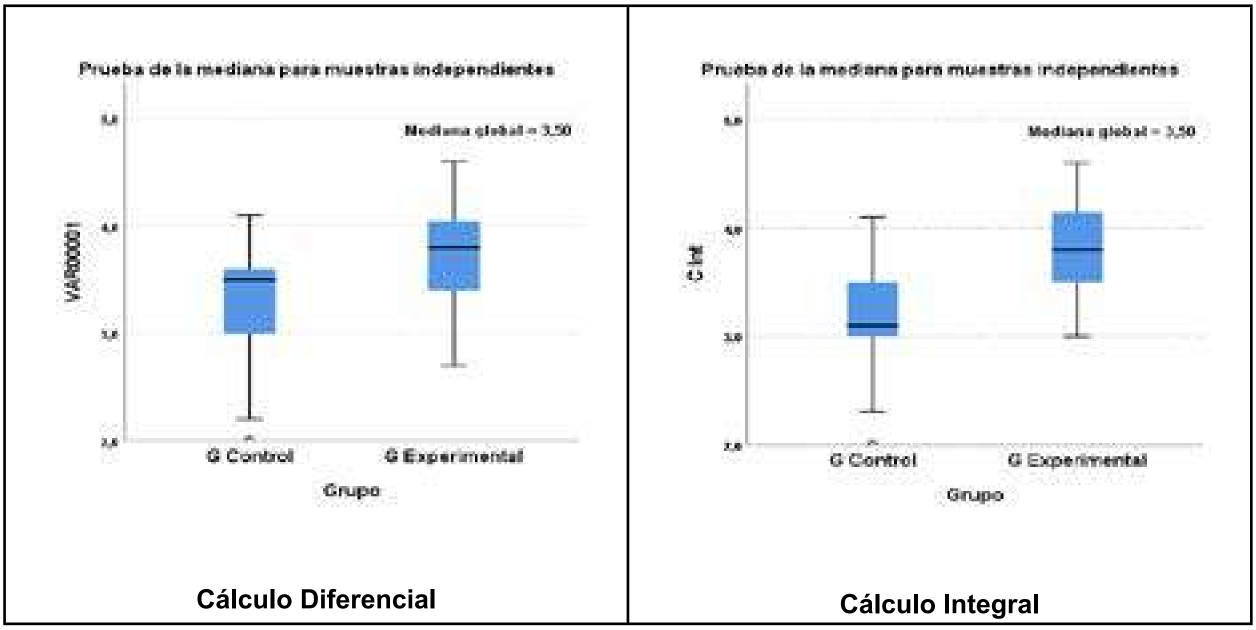

Figura 5. Comparación de la mediana para cálculo diferencial e integral

La comparación de las medianas de los grupos control y experimental se realiza mediante la prueba de Mann-Whitney, utilizando la corrección por continuidad de Yates y aproximando los niveles de significación mediante la distribución Chi-cuadrado. La prueba con los resultados del curso cálculo diferencial arroja un estadístico de prueba de 5,718 con una significación asintótica bilateral de 0,30. La prueba con los resultados del curso cálculo integral arroja un estadístico de prueba de 16,264 con una significación asintótica bilateral de 0,00. En ambos casos, los resultados permiten inferir un mejor desempeño académico en los cursos de cálculo diferencial y de cálculo integral para los estudiantes del grupo experimental con respecto a los del grupo control.

Con el fin de establecer relaciones entre los diferentes niveles de pensamiento matemático desarrollado por los estudiantes y los niveles de desempeño en cálculo diferencial e integral, se establecieron niveles de desempaño categóricos obtenidos a partir de las puntuaciones obtenidas en los diferentes test aplicados. Se elabora diagrama de correspondencias múltiples, que permite identificar en un plano bidimensional, las relaciones multidimensionales que se presentan entre las diferentes modalidades de las variables de estudio con base en los resultados de cada uno de los estudiantes que participaron en la investigación; los resultados se presentan en la figura 6.

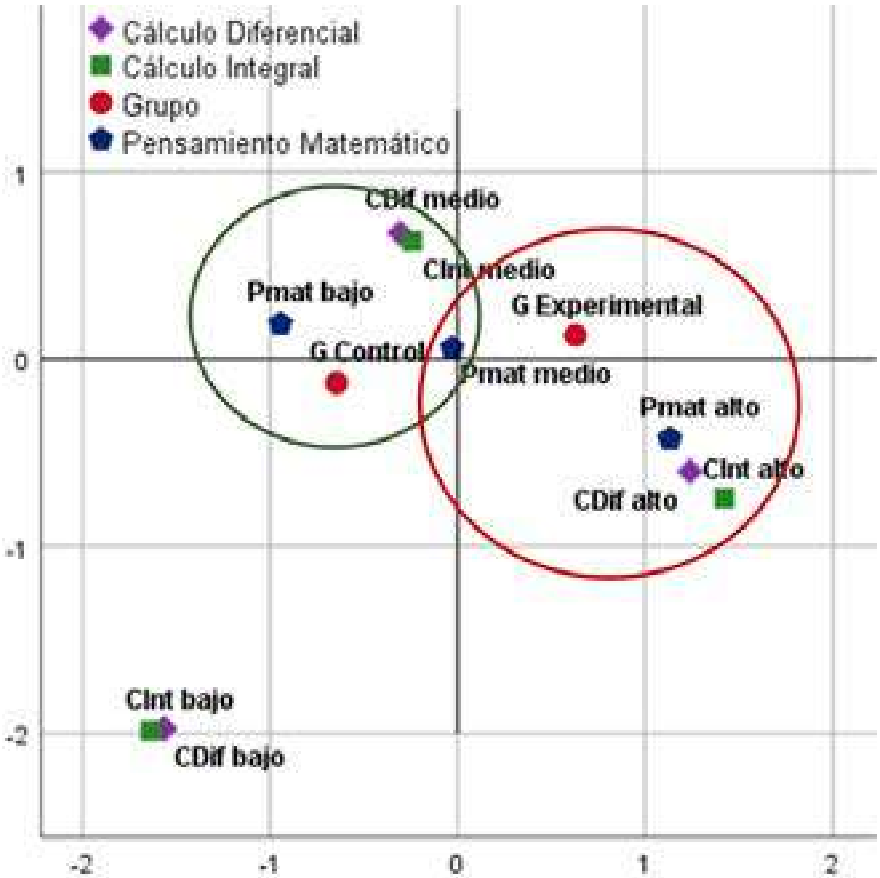

Figura 6. Correspondencias entre desarrollo de pensamiento matemático y desempeño en cálculo

El diagrama se elabora con base en las categorías asignadas (alto, medio y bajo) a partir de las puntuaciones obtenidas por los estudiantes en cada uno de los test. Los estudiantes del grupo control se caracterizan por valoración baja en desarrollo del pensamiento matemático luego de la intervención pedagógica y por un rendimiento medio en cálculo diferencial e integral. Los estudiantes del grupo experimental, a quienes se les realizó intervención pedagógica para el concepto de infinitesimal, se caracterizan por un desarrollo alto en el pensamiento matemático y alto desempeño académico en los cursos de cálculo diferencial e integral.

4. CONCLUSIONES

La investigación permite establecer que existe relación entre la comprensión del concepto infinitesimal, el desarrollo del pensamiento matemático y el desempeño académico de los estudiantes en los cursos de cálculo diferencial e integral.

Se evidencia que si el estudiante comprende el concepto infinitesimal, obtiene mejores resultados académicos y por ende logra mejor comprensión del cálculo diferencial e integral enmarcado entre las matemáticas aplicadas a la ingeniería.

Los resultados de la investigación permiten inferir que el trabajo colaborativo en el estudio del concepto infinitesimal a partir del trabajo con geometría fractal facilita el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de cálculo

REVISTA BOLETÍN REDIPE 10 (13): 432-442 - DICIEMBRE 2021 - ISSN 2256-1536

Conflicto de intereses: Los autores manifiestan que no hay conflicto de intereses

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] M. Vergel, H. Gallardo y R. Portal, "Las tecnologías de la información y las comunicaciones en el fortalecimiento del pensamiento físico matemático", *AIBI revista de investigación, administración e ingeniería*, vol 8, no. S1, pp. 83-89, 2020.

[2] H. Gallardo, D. Villamizar y E. Maldonado, "Project based pedagogy in the development of physical-mathematical thinking", *Journal of Physics: Conference Series,* vol. 1674, no. 012013, pp. 1-7, 2020.

[3] M. Pérez y A. Ocaña, *Pensamiento Matemático,* Bogotá: U. Jorge Tadeo Lozano, 2013.

[4] C. Cabezas y M. Mendoza, "Manifestaciones emergentes del pensamiento variacional en estudiantes de cálculo inicial, *Formación Universitaria,* vol. 9, no. 6, pp. 13-26, 2016.

[5] M. Vergel, H. Duarte y J. Martínez, "Desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de cálculo integral su relación con la planificación docente", *Revista Científica*, vol. 23, pp. 17-29, 2015.

[6] A. Castro, M. Prat y N. Gorgorió, "Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas: su evolución tras décadas de investigación", *Revista de educación,* no. 374, pp. 43-68, 2016.

[7] C. Valdivé y S Garbin, "¿Cómo piensan los estudiantes el infinitesimal antes de iniciar el curso de análisis matemático?, *Paradigma,* vol. 24, no. 1, pp. 117-144, 2013.

[8] D. Tall, "Understanding the Calculus", *Mathematics Teaching*, vol. 110, pp. 49-53, 1985.

[9] E. Bell, *Historia de las matemáticas*, México: Fondo de cultura económica, 1985.

[10] C. Boyer, *The history of the calculus and its conceptual development*, Nueva York: Dover Publications, 1959.

[11] B. Mandelbrot, *Los objetos fractales: forma, azar, dimensión. (3ª ed)*, Barcelona: Tusquets Editores S.A., 1993.

[12] M. Barnsley, *Fractals Everywhere*, New York: Academic Press, 1988.

[13] B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature,* New York: W. H. Freeman, 1985.

[14] R. Suárez, *El principio de la relatividad y el problema del conocimiento,* Buenos Aires: Editorial Dunken, 2017.

[15] H. Gallardo, M. Vergel, y F. Villamizar, "Investigación intervención y enfoque multimétodo en ciencias humanas y educación matemática", *Logos, Ciencia y Tecnología,* vol. 9, no. 2, pp. 85-96, 2017.

[16] H. Goldstein, *Multilevel statistical models*, Londres: Institute of Education. Multilevel Models Project, 1999.

REVISTA BOLETÍN REDIPE 10 (13): 432-442 - DICIEMBRE 2021 - ISSN 2256-1536

[17] H. Quené y H. Van Den Bergh, “On multi-level modeling of data from repeated measured designs: a tutorial” *Speech Communication*, no. 43, pp. 103-121, 2004.

[18] E. Bologna, “Tendencias en el análisis estadístico” *Revista Evaluar*, no. 11, pp. 59-84, 2012

[19] H. Gallardo and M. Vergel, “Exploración y aprendizaje de la geometría fractal”, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* vol. 13, pp. 186-190, 2000.

[20] H. Gallardo, M. Vergel and O. Alvarado, “Development of geometric thought”*, Journal of Physics: Conf. Series,* vol. 1329-012016, pp. 1-7, 2019.

[21] N. Cortada de Kohan, “Teoría de respuesta al ítem” *Revista Evaluar*, no. 4, pp. 95-110, 2004.

[22] H. Attorresi, G. Lozzia, F. Abal, M. Gilbert y M. Aguerri M, “Teoría de respuesta al ítem. Conceptos básicos y aplicaciones para la medición de constructos psicológicos”, *Revista Argentina de Clínica Psicológica*, vol. 18, no. 2, pp. 179-188, 2009.

[23] J. Muñiz, “Las teorías de los tests: teoría clásica y teoría de respuesta a los ítems” *Papeles del psicólogo*, vol. 31, no. 1, pp. 57-66, 2010.

[24] G. Prieto y A. Delgado, “Análisis de un test mediante el modelo de Rasch” *Psicothema*, vol. 25, no. 1, pp. 94-100, 2003.

[25] F. Ghio, V. Morán, S. Garrido, A. Azpilicueta, F. Córtez y M. Cupani, “Calibración de un banco de ítems mediante el modelo de Rasch para medir razonamiento numérico, verbal y espacial”, *Avances en Psicología Latinoamericana*, vol. 38, no. 1, pp. 157-171, 2020.

REVISTA BOLETÍN REDIPE 10 (13): 432-442 - DICIEMBRE 2021 - ISSN 2256-1536