

RECIBIDO EL 25 DE AGOSTO DE 2021 - ACEPTADO EL 27 DE NOVIEMBRE DE 2021

APLICACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS EN LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA. CASO LA PENDIENTE DE LA RECTA

APPLICATION OF MATHEMATICS IN THE TEACHING OF PHYSICS. CASE THE SLOPE OF THE STRAIGHT LINE

Raúl Prada Núñez¹

Audin Aloiso Gamboa Suarez²

William Rodrigo Avendaño Castro³

RESUMEN

En nuestro país, uno de los retos que deben asumir los docentes en ejercicio en los niveles de educación básica y media, corresponde con la interdisciplinariedad de saberes, es decir, promover en los estudiantes el reconocimiento de un currículo que no debería funcionar de manera aislada. Por el contrario, se sugiere la implementación de diversos recursos pedagógicos que promuevan la complementariedad de conocimientos puesto que en aquellas experiencias que se han documentado, han evidenciado mejores desempeños académicos. Esta investigación reporta un ejemplo de la aplicación de un concepto básico del currículo en matemáticas

como herramienta en la solución de situaciones de la física, con el objetivo de potenciar la comprensión de las relaciones entre variables, como ocurre con las gráficas de la cinemática. El cuestionario diseñado para esta investigación es diligenciado por un grupo de estudiantes de undécimo grado de una institución educativa privada. Se compone de tres situaciones propuestas para responder a tres preguntas abiertas con respuestas argumentadas. Se resaltan como hallazgos que un grupo de estudiantes se ubica en un nivel básico de interpretación de las gráficas cuya actividad se focaliza en hacer una descripción de lo que sucede en cada intervalo de la trayectoria, seguido de un pequeño grupo que exhibieron la capacidad de asociar el concepto de la pendiente de la recta con los conceptos de velocidad o aceleración en función de las variables dadas en el gráfico, basando su argumentación en conceptos muy intuitivos pero sin soporte matemático.

¹ Magister en Educación Matemática. UFPS. E-mail: raulprada@ufps.edu.co, Orcid: <https://orcid.org/0000-0001-6145-1786>

² Doctor en Ciencias de la Educación. UFPS. E-mail: audingamboa@ufps.edu.co, Orcid: <https://orcid.org/0000-0001-9755-6408>

³ Doctor en Ciencias Sociales y Humanas. UFPS. E-mail: williamavendano@ufps.edu.co, Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-7510-8222>

PALABRAS CLAVE: Pendiente de la recta, cinemática, física, matemáticas.

ABSTRACT

In our country, one of the challenges that teachers in basic and secondary education must take on is the interdisciplinary nature of knowledge, that is to say, to promote in students the recognition of a curriculum that should not work in isolation. On the contrary, the implementation of diverse pedagogical resources that promote the complementarity of knowledge is suggested, since in those experiences that have been documented, they have shown better academic performance. This research reports an example of the application of a basic concept of the mathematics curriculum as a tool in the solution of physics situations, with the aim of enhancing the understanding of the relationships between variables, as occurs with the graphs of kinematics. The questionnaire designed for this research is filled in by a group of eleventh grade students from a private educational institution. It consists of three situations proposed to respond to three open questions with argued answers. It is highlighted as findings that a group of students is located in a basic level of interpretation of the graphs whose activity focuses on making a description of what happens in each interval of the trajectory, followed by a small group that exhibited the ability to associate the concept of the slope of the line with the concepts of velocity or acceleration as a function of the variables given in the graph, basing their argumentation on very intuitive concepts but without mathematical support.

KEY WORDS: Slope of a straight line, kinematics, physics, mathematics.

INTRODUCCIÓN

Algunos autores, como se señala en Thuillier (1990), afirman que los orígenes de la teoría del movimiento sugerida por Galileo

(Fernández & Rondero, 2004) fue una teoría audaz y especulativa sobre los fenómenos que observó; mientras que otros investigadores dieron continuidad a sus ideas, llegando a la correspondencia entre el fenómeno observado y la teoría en temas como el movimiento de los proyectiles, la caída libre, los movimientos pendulares y la naturaleza del vacío, como se revisa en el trabajo de Álvarez & Posadas (2002). Estos primeros trabajos dieron lugar a la rama de la física mecánica conocida como conocida como cinemática, que se ocupa del estudio de las características y magnitudes del movimiento, como la velocidad o distancia recorrida por un móvil en cada tiempo, o la aceleración que experimenta un cuerpo al se desplaza sobre una superficie, entre otras.

Cuando se trata de movimiento, es necesario tener una definición clara del sistema de referencia para poder utilizar términos como posición, velocidad, rapidez o aceleración; entonces se podría afirmar que el movimiento es el cambio de posición que experimentan unos cuerpos respecto a otros, por lo que se afirma que movimiento es relativo, ya que siempre debe ser descrito con respecto a quién o qué describe, como como se menciona en Fazio (2017). Es necesario precisar algunos conceptos asociados al movimiento: (a) trayectoria corresponde a la línea que el objeto describe durante su movimiento, que puede ser rectilínea o curvilínea, esta última a su vez puede clasificarse como circular, elíptica o parabólica; (b) el desplazamiento corresponde al segmento dirigido que une dos posiciones diferentes en la trayectoria seguida por un cuerpo (Bautista et al., 2005); (c) la distancia recorrida es la medida de la trayectoria; (d) la velocidad corresponde a la distancia recorrida por unidad de tiempo; (e) la velocidad se define como el cociente entre el desplazamiento y el tiempo transcurrido (es una cantidad vectorial); por último, (f) la

aceleración corresponde al cambio de velocidad experimentado por el cuerpo por unidad de tiempo.

Todos estos conceptos se articulan cuando se afirma que un cuerpo sigue un movimiento rectilíneo uniforme cuando su trayectoria describe una línea recta manteniendo su velocidad constante. Diversas situaciones en el contexto físico tratan de resolver problemas propuestos, algunos de los cuales se plantean en un lenguaje cotidiano en los que se hace una descripción detallada de lo que ocurre con el movimiento del cuerpo en determinados periodos de tiempo mientras que otras recurren a la representación tabular de la posición en función del tiempo, y otras utilizan gráficos de posición-tiempo con el agravante de que los alumnos deben entender el gráfico para interpretarlo correctamente y así tener la capacidad de extraer los datos del problema. El uso de gráficos ha sido relevante en el estudio de la física, por ejemplo, las gráficas espacio-tiempo fueron la base para el movimiento uniformemente acelerado movimiento, o el estudio de Marengi (2018) donde menciona cómo los grandes físicos utilizan diagramas geométrico-dinámicos que involucran una diversidad de conceptos matemáticos para representar la relación variable y continua de parámetros físicos como el tiempo o la fuerza.

Derivado del estudio de la física en los niveles educativos preparatorios para la educación superior, los estudiantes se espera que los estudiantes desarrollen una serie de competencias directamente asociadas al dibujo e interpretación de gráficos; como se destaca en un documento emitido por el “Ministerio de Educación”, Colombia (Mineducación, 2006), que sugiere el análisis de los conceptos de cinemática o solicita el establecimiento de relaciones entre variables asociadas al movimiento o destaca la importancia de los procesos matemáticos o el uso de diversos

registros de representación para el desarrollo de las competencias en física (Mineducación, 2006). A partir de base de estos lineamientos, se podría esperar que los estudiantes que llegan a los grados de educación secundaria técnica en Colombia sean capaces de interpretar una gráfica de cinemática a la luz tanto de los conceptos físicos como de los conceptos matemáticos implícitos en ellos, como es el caso de la pendiente de la recta en una posición-tiempo que se asocia a la velocidad o el mismo concepto matemático pero en gráficas de velocidad-tiempo para explicar el concepto de aceleración.

La investigación sobre la interpretación de gráficos relacionados con el movimiento rectilíneo uniforme (URM) o el movimiento rectilíneo acelerado (ARM) han revelado dificultades en el proceso de extracción de información o en establecer las relaciones entre las variables implicadas (Sandoval et al., 2017; Dolores et al., 2016). Así, se cita a Cantoral & Montiel (2001), diciendo que hay dos maneras de entender el proceso de graficación, una es verlo como una técnica para esbozar la gráfica de una función, y la otra es identificar el significado y la importancia de sus propiedades. Entonces, para este trabajo asumimos como referencia para el análisis lo expuesto en Dolores et al. (2016) Quienes afirman que la interpretación se refiere a la capacidad de leer un gráfico tanto local como globalmente para darle sentido o significado, destacando que “lo local se refiere a la extracción de datos específicos del gráfico y lo global se refiere a la determinación de los comportamientos y tendencias de los gráficos” (Dolores et al., 2016).

Es a partir de esta motivación que se desarrolla esta investigación con el objetivo de determinar el nivel de procesamiento de la información en la interpretación de los gráficos cinemáticos. Cabe destacar que se adoptan los tres niveles definidos por Wainer (1992), se adoptan: (a)

elemental, que implica la extracción de datos o la lectura aislada de puntos; (b) intermedio, que requiere la identificación de tendencias; (c) alto, que requiere una profunda comprensión del comportamiento de los datos; (d) alta, que requiere una comprensión profunda del comportamiento de los datos; (e) baja, que requiere la identificación de tendencias; y (f) alta, que requiere una profunda comprensión del comportamiento de los datos.

METODOLOGÍA

Esta investigación se ha organizado en el marco de la ingeniería didáctica como método de investigación que se encuentra en el registro de estudios de caso y cuya validación es esencialmente interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori (Campeón et al., 2018).

Se pueden distinguir cuatro fases: (a) la fase 1, de análisis preliminar, en la que se analizan diversas informaciones se analiza, por ejemplo, el análisis epistemológico del contenido, las formas de enseñanza y sus efectos el análisis de las concepciones de los alumnos, con el fin de clasificar las dificultades según su epistemológica, cognitiva o didáctica; (b) la fase 2, la concepción y el análisis a priori donde el investigador decide intervenir sobre determinadas variables influyentes que en este caso corresponden a algunas de origen didáctico con el fin de influir en algunas epistemológicas para lo cual recurre al diseño de secuencias didácticas; (c) fase 3 de experimentación donde se realiza el proceso de intervención con los alumnos en el que ejecutan las secuencias didácticas previamente diseñadas; (d) fase 4 de análisis a posteriori en esta última etapa se realiza el proceso de contraste entre los resultados encontrados en la fase 1 y los identificados en la fase 3 se lleva a cabo, con el fin de realizar el proceso de validación interna del proceso pedagógico realizado.

En este artículo informamos únicamente de los resultados derivados de la primera fase en la que se identifican las dificultades presentes en los alumnos se identifican junto con la determinación del nivel de interpretación que poseen. Para ello, se adopta un enfoque cualitativo a nivel descriptivo transversal siguiendo un diseño de campo diseño de campo (Arias, 2012) ya que los datos fueron recolectados directamente de los estudiantes matriculados en el grado undécimo de una institución educativa privada institución educativa privada con énfasis en ciencias naturales y que residen en el área metropolitana de San José de Cúcuta, Colombia, durante el mes de junio de 2021 antes de salir de vacaciones de mitad de año.

En total hay 35 estudiantes ($N = 35$) y calculando el tamaño de la muestra (n_1) mediante la ecuación (1) y mediante la ecuación (2) se determina un total de 17 estudiantes ($n_0 = 17$) como tamaño óptimo de la muestra asumiendo una probabilidad de éxito del 55% ($P = 0,55$), un error del 5% ($e = 0,05$) y un nivel de confianza del 95% (equivalente a $z = 1,96$) con un nivel de significación del 5% ($\alpha = 0,05$). Además, se consideró como criterio de inclusión que los estudiantes asistieran personalmente a la institución, por lo que el proceso de muestreo utilizado fue probabilístico como se indica en Cantoral & Montiel (2001).

$$n_1 = \frac{N * Z_{\alpha/2}^2 * P * (1 - P)}{e^2 * (N - 1) + Z_{\alpha/2}^2 * P * (1 - P)} \quad (1)$$

$$n_0 = \frac{n_1}{1 + n_1/N} \quad (2)$$

El instrumento utilizado incorpora tres situaciones, una es una descripción de la posición en el tiempo, otra es un gráfico posición-tiempo para el MRU y el último es un gráfico velocidad-tiempo para el MRA. En todos los casos, se formulan tres preguntas, una para cada nivel de comprensión definido por Cantoral

& Montiel (2001). La selección de las situaciones resultó de un panel de expertos formado por los investigadores, el profesor de la asignatura en el institución educativa y un profesor de física de otra institución educativa con más de veinte años de experiencia en la asignatura, que orientó sobre el tipo de preguntas a partir de la revisión de tres libros de texto clásicos.

Para cada situación propuesta, se permiten respuestas abiertas, ya que el grupo de estudiantes no es tan numeroso y, dado el objetivo de la investigación, interesaba conocer la opinión de cada alumno sobre las situaciones propuestas. Posteriormente, se analizan las respuestas de forma descriptiva en cuanto a sus afinidades e intenciones argumentativas.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El grupo de estudiantes encuestados se distribuye uniformemente por sexos, con edades comprendidas entre los 16 años y 17 años, con una media de 16,5 años y una desviación típica de 0,52, por lo que generar un intervalo en torno a la media de una desviación típica cubriría prácticamente a todos los informantes; todos ellos afirmaron haber visto asignaturas de física en el centro educativo desde que entraron en sexto grado, pero al explorar su gusto por las clases impartidas por el profesor, el 71,4% dijo que hay veces la clase no es muy atractiva porque es muy rutinaria, el profesor siempre hace lo mismo siempre hace lo mismo: menciona el tema, una breve explicación, en algunos casos hay un video y en otros a resolver ejercicios a partir de la fórmula dada por el profesor.

De las características mencionadas por los alumnos respecto al enfoque metodológico adoptado por el profesor, éste ha puesto especial énfasis en la resolución de ejercicios, descuidando la resolución de problemas. Se hace especial hincapié en diferenciar entre ejercicio y problema como se aclara en Prada-Núñez et al., (2016) donde se menciona que un

ejercicio corresponde a aquellas situaciones en las que el alumno conoce el proceso a seguir para llegar a la solución, porque ya ha sido trabajado por el profesor en clase, mientras que un problema requiere que el alumno se enfrente a una situación que exige los procesos de razonamiento, análisis formulación de hipótesis, modelización matemática y experimentación en busca de una posible solución.

Como se mencionó en la introducción, se espera determinar las dificultades que tienen los alumnos para interpretar gráficos de cinemática en los que se puede concluir que, en función de las variables relacionadas en la gráfica, la pendiente de la recta corresponde a la velocidad o aceleración que experimenta un cuerpo u objeto.

Situación 1: Descripción de la trayectoria de un cuerpo

La Figura 1 corresponde a la trayectoria seguida por una partícula durante un periodo de nueve segundos; a partir de la información proporcionada por el gráfico de posición frente al tiempo, responde a las siguientes preguntas: a) ¿qué posición ocupa el cuerpo después de los primeros cinco segundos? (b) ¿en qué intervalo de tiempo se detiene el cuerpo? (c) ¿qué ocurre con el movimiento del cuerpo en el intervalo de 6 a 9 segundos?

Cuando se preguntó a los alumnos por la posición del cuerpo tras los primeros cinco segundos, se comprobó que el 42,8% afirmó que se encontraba a sólo 35 unidades del punto de partida basándose en la correspondencia entre las variables (concepto de par ordenado en el plano cartesiano (x,y)), mientras que el 35,7% mencionó que el cuerpo se había movido de su posición inicial, pero sus descripciones eran ambiguas y, por tanto, no definir la posición del cuerpo en el momento dado, y el 21,4% de los alumnos restantes tuvo dificultades

para identificar las variables en función de sus respectivos ejes de coordenadas.

Siguiendo con la siguiente pregunta, el 42,8% de los alumnos afirma que dos segundos después de haber iniciado el movimiento del cuerpo, éste se detiene durante dos segundos a 20 metros del punto de partida, lo que se refleja en el gráfico como una línea horizontal. El porcentaje restante de alumnos afirma que el cuerpo *sí* se *detiene* pero no identifican el instante de tiempo en el que esto ocurre a partir del gráfico; cuando se pide a los alumnos que Cuando se les pide que interpreten la gráfica a los 6 segundos y a los 9 segundos, el 42,8% afirma que el cuerpo regresa 45 unidades de distancia al punto de partida en esos tres segundos (utilizando el concepto de desplazamiento), mientras que el porcentaje restante afirma que el cuerpo

sigue en movimiento pero no ofrece ninguna descripción de las variables en estudio.

A partir de las respuestas dadas por los alumnos y de acuerdo con los niveles de interpretación establecidos por Wainer (1992), se puede afirmar que, en esta primera situación, el 42,8% de los alumnos se encuentra en el nivel alto, ya que han demostrado la capacidad de explicar el comportamiento global de la gráfica, identificando las características de cada tramo de la trayectoria y han asociado la gráfica con el comportamiento de las variables. El porcentaje restante se sitúa en el nivel elemental, caracterizado por el intento de explicar el comportamiento de la posición como variable independiente del tiempo o del tiempo independientemente de la posición, por lo que no están analizando la relación de correspondencia que existe entre las variables en estudio.

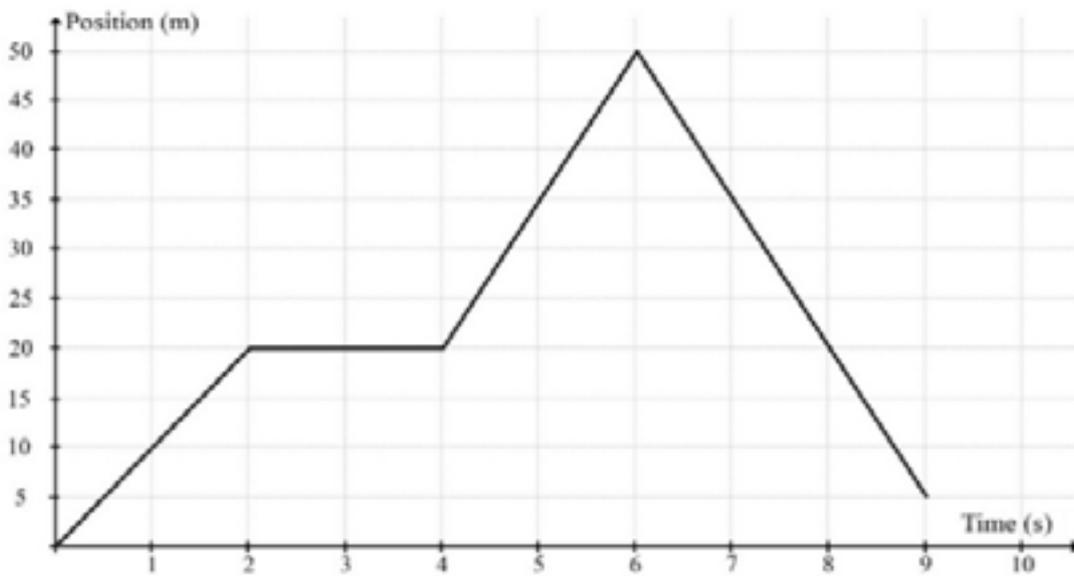


Figura 1. Trayectoria seguida por una partícula

Situación 2: Movimiento Rectilíneo Uniforme

Una partícula en movimiento recorre una distancia $s(t)$ (en metros) en relación con el tiempo t (en segundos) como se muestra en Figura 2. A partir de esta situación, responde

a las siguientes preguntas (a) ¿cuál es la velocidad de la partícula en el punto A? (b) ¿cuál es la velocidad de la partícula en el punto B? (c) ¿se puede decir que el movimiento es uniforme rectilíneo?

Cuando se preguntó a los alumnos por la velocidad experimentada por la partícula en el punto A y en el punto B El 35,7% de ellos afirmó que la velocidad es la misma en ambos puntos, utilizando la ecuación (3) para calcular el valor de la velocidad (v), concluyendo que aumenta en 5 metros por cada segundo que transcurre desde que comienza a moverse. En este grupo de alumnos encontramos afirmaciones como *la velocidad es la misma en todo momento o independientemente del tiempo transcurrido, la velocidad es constante*, por lo que estos argumentos los centran en el alto nivel de interpretación. El porcentaje restante se sitúa en el nivel elemental: el 35,7% intenta con sus argumentos explicar el movimiento de la partícula, pero sin determinar la velocidad,

argumentando que han visto el tema, pero no recuerdan la ecuación cinemática.

$$v = \frac{s(t)}{t} \tag{3}$$

El porcentaje restante (28,6%) explica el comportamiento de la gráfica en términos matemáticos, afirmando que la gráfica representa una función creciente, ya que la posición aumenta a medida que transcurre el tiempo, pero interpretan que la pendiente de la recta representa la velocidad de la partícula. El grupo de nivel elemental muestra una desconexión entre los temas desarrollados en clase de física y las situaciones cotidianas que experimentan.

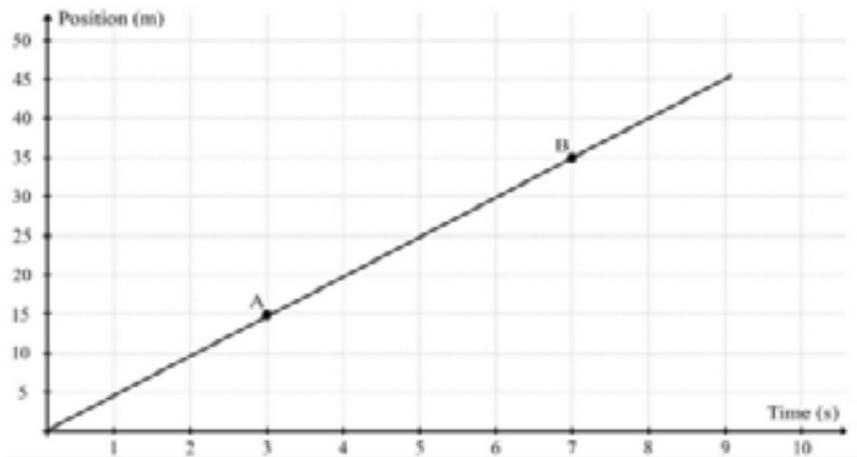


Figura 2. Trayectoria seguida por una partícula

Situación 3. Movimiento Rectilíneo Acelerado

La siguiente gráfica velocidad-tiempo corresponde al movimiento rectilíneo de una partícula; a partir de la información de la gráfica mostrada en la Figura 3, responde a las siguientes preguntas: (a) ¿cuánto tiempo lleva el coche en movimiento? (b) ¿en qué tramo de la trayectoria frena el conductor del coche? (c) ¿En qué tramo experimenta el cuerpo la mayor aceleración?

En cuanto al tiempo que el coche ha estado en movimiento, el 71,4% de los alumnos proporcionaron respuestas correctas, pero con diferentes argumentos, por ejemplo, se encontraron respuestas basadas en los valores del eje de abscisas como durante los primeros 45 segundos, otros argumentaron en base a las características de la gráfica, por ejemplo se mueve a lo largo de toda la trayectoria analizada. El porcentaje restante (28,6%), presenta dificultades en la interpretación del gráfico ya que afirman que el coche se mueve durante 30

segundos, ya que dura 15 segundos detenido en la sección C, lo que demuestra la presencia de una concepción derivada de la gráfica posición-tiempo donde, al ser su trayectoria horizontal, se supone que la velocidad es nula o equivalente al hecho de que se detuvo, por lo que los alumnos ignoran las variables asociadas a los ejes de la gráfica.

Continuando, el 64,3% de los alumnos afirma que los frenos se aplican en la sección D y en la sección E, argumentando, por ejemplo, que la gráfica desciende en su trayectoria o que en estos tramos la relación es inversa entre velocidad y tiempo. El porcentaje restante de alumnos concluye lo mismo, pero su argumentación se centra únicamente en el cálculo del diferencial entre el valor de la ordenada de la función Δv al final ($v_{final} \cong Y_2$) y al principio ($v_{inicial} \cong Y_1$) del tramo (Ecuación (4)), argumentando que los valores disminuyen la velocidad después de aplicar los frenos.

$$\Delta v = v_{final} - v_{inicial} \cong Y_2 - Y_1 \quad (4)$$

Por último, cuando se les pidió que identificaran en qué sección la aceleración es mayor, se determinó que en 78,6% de los casos, la respuesta se basó en el ángulo de inclinación o elevación de la recta respecto a la horizontal en el tramo analizado, lo que los llevó a concluir que el tramo B era el más inclinado, por lo que tácitamente los alumnos están aplicando el concepto de pendiente de la recta, pero no apoyan su razonamiento con procesos algebraicos. El resto de los alumnos concluyen que en el tramo A y sección B la aceleración es positiva porque la recta es creciente, mientras que en la sección D y sección E la aceleración es negativa porque la recta es decreciente; así, la argumentación proporcionada por los alumnos en esta situación los sitúa en el nivel Intermedio al tratar de identificar intervalos en los que la velocidad y la aceleración aumentan o disminuyen a partir de la pendiente de la recta, pero sin realizar ningún proceso algebraico.

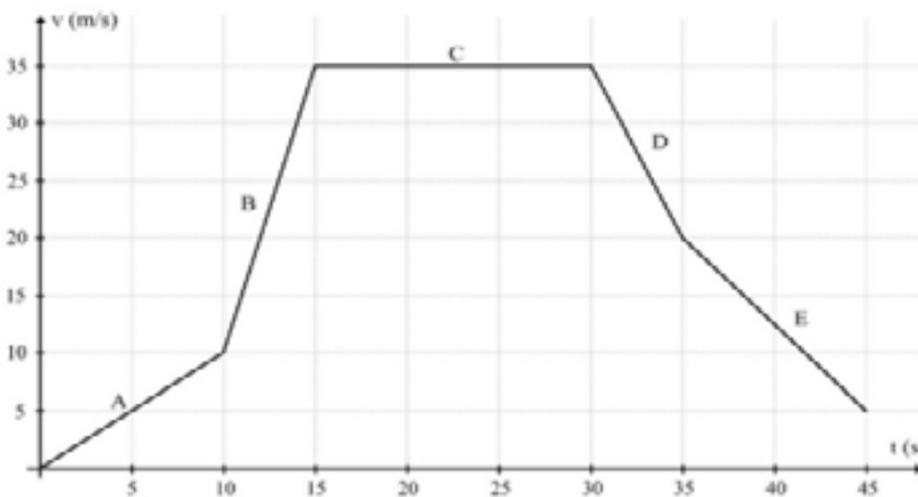


Figura 3. Trayectoria seguida por una partícula

CONCLUSIONES

Este trabajo permitió determinar que los alumnos participantes tienen una serie de concepciones sobre los conceptos tanto de la física como de las matemáticas, que surgen cuando se enfrentan a situaciones problemáticas que parten del registro gráfico donde se requieren procesos como la interpretación, razonamiento y la modelización matemática, esta última se convierte en un problema ya que los alumnos demostraron que dependían de que el profesor les proporcionara la fórmula y si no se les proporcionaba si no se les proporcionaba, les resultaba casi imposible resolver cualquier situación, a pesar de que el concepto de pendiente es el cociente entre dos magnitudes o dos diferenciales.

Las conclusiones derivadas de este proceso de diagnóstico sirven de base para el diseño de secuencias didácticas dirigidas a mejorar las competencias de los alumnos en estas materias, es decir, se trata de conseguir que los alumnos no sólo utilicen las fórmulas, sino que sean capaces, mediante el razonamiento, de proponerlas como la relación entre dos variables conocidas, como en el caso de las gráficas tratadas en este diagnóstico. En este modo, los alumnos pueden avanzar hacia niveles superiores de comprensión del conocimiento. Estas competencias son no sólo necesarias en el currículo escolar, sino que son imprescindibles en la vida cotidiana de las personas, lo que se convierte en una razón más para valorar la importancia de la física y tratar de entender sus conceptos, ya que contribuyen a la formación de ciudadanos competentes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Álvarez, J. L., & Posadas, Y. (2002). La obra de Galileo y la conformación del experimento en la física. *Revista Mexicana de Física*-49(1), 61-73.
- Arias, F. G. (2012). *El Proyecto de Investigación. Introducción a la Metodología Científica*. Editorial Episteme.
- Bautista, M., Romero, B. C., Carrillo, E., Castiblanco, S. G., & Valenzuela, J. P. (2005). *Física I*. Editorial Santillana.
- Campeón, M. C., Aldana, E., & Villa, J. A. (2018). Ingeniería didáctica para el aprendizaje de la función lineal mediante la modelación de situaciones. *Sophia*, 14(2), 115-126.
- Cantora, R., & Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático*. Prentice Hall.
- Dolores, C., Rivera, M. I., & Tejada, Y. (2016). Una experiencia didáctica con incidencia en la interpretación de gráficas cinemáticas. *Revista de la Escuela de Ciencias de la Educación*, 2(11), 129-154.
- Fazio, R. (2017). Movimiento, cuerpo y sustancia corpórea en Leibniz: la defensa de la relatividad del movimiento y su impacto en el desarrollo de la metafísica de los cuerpos. *Eidos: Revista de Filosofía de la Universidad del Norte*, (26), 238-267,
- Fernández, M., & Rondero, C. (2004). El inicio histórico de la ciencia del movimiento: implicaciones epistemológicas y didácticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 7(2), 145-156.
- Marengi, C. (2018). El conocimiento simbólico en Gottfried Leibniz *Studium: Filosofía y Teología*, 21(42), 27-64.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Ciencias Naturales y Ciencias Sociales*. Mineducación.
- Prada-Núñez, R., Hernández-Suárez, C. A., & Ramírez-Leal, P. (2016). Comprensión de la noción de función y la articulación de

los registros semióticos que la representan entre estudiantes que ingresan a un programa de ingeniería. *Revista Científica*, 2(25), 188-205.

Sandoval, M., García, M., Mora, C., & Suárez, C. (2017). Estrategia enseñanza-aprendizaje basada en experimentos (ABE) para mejorar la comprensión de gráficas en Cinemática. *Latin-American Journal of Physics Education*, 11(3), 1-8.

Thuillier, P. (1990). *De Arquímedes a Einstein: Las Caras Ocultas de la Invención Científica 1*. Alianza.

Wainer, H. (1992). Understanding graphs and tables. *Educational Researcher*, 21(1), 14-23.