



RECIBIDO EL 21 DE JULIO DE 2021 - ACEPTADO EL 19 DE OCTUBRE DE 2021

La comprensión de las transformaciones rígidas en el plano desde la teoría Apoe

The compression of rigid transformations in the plane from Apoe theory

Jaime E. Avila¹

Zagalo E. Suárez²

Omaida Sepúlveda²

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

· 2 1 9 ·

RESUMEN

El presente artículo informa sobre los resultados de la investigación que tiene como propósito, describir y explicar cómo los estudiantes de grado sexto comprenden los conceptos de transformaciones básicas en el plano, a través

del análisis de las estructuras mentales que construyen cuando resuelven ejercicios y situaciones problema luego de participar en secuencias didácticas. Para tal fin se usó la metodología propuesta en la teoría APOE, que comprende el ciclo de tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de la enseñanza, y la recolección y análisis de la información. Como resultados, del análisis teórico se formuló una descomposición genética preliminar que describe una ruta de construcción de los esquemas y orientó el segundo componente para promover la comprensión de las transformaciones; del tercer componente se verificó la construcción de las estructuras mentales y se refinó la descomposición genética. Se concluye que la comprensión de los conceptos se promueve a través de situaciones concretas del contexto, variadas representaciones y con la mediación de las TICs.

1. *Docente, licenciado en matemáticas, estudiante de maestría en educación matemática, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Email: jaimeavila758@gmail.com Phone: +573138076826 ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-9222-1032>*

2. *Docente investigador, Licenciado en Matemáticas y Física, Ingeniero de Sistemas, Especialista en Computación para la docencia, Magister en Ciencias Matemáticas y Doctor en Ciencias de la Educación, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, Colombia. Email: zagalo.suarez@uptc.edu.co Phone: +573108035853 ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-1692-2240>*

3. *Docente investigador, Licenciada en Matemáticas, Ingeniera de Sistemas, Especialista en Computación para la docencia, Magister en Ciencias Matemáticas y Doctora en Ciencias de la Educación, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, Colombia. Email: omaida.sepulveda@uptc.edu.co Phone: +573118556222 ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-2950-8137>*



PALABRAS CLAVE: Comprensión, transformaciones rígidas, Teoría APOE, plano cartesiano.

ABSTRACT

This article gives an account of the research that aims to describe and explain how sixth grade students understand the concepts of basic transformations in the plane through the analysis of the mental structures that build when solving exercises and problem situations after participating in didactic sequences. For this purpose, the methodology proposed from the framework of APOE theory was used, carrying out: theoretical analysis, design and implementation of teaching, and observation, analysis and verification of data. In the first component, a preliminary genetic decomposition is designed, which relates the route of schemes to guide that gives rise to the second component to promote the understanding of the transformations, ending with the third component it is verified if the students carry out the mental constructions necessary to understanding the concepts. It is concluded that the learning of the concepts related to the investigation occurs better starting with concrete situations of the context.

KEYWORDS Comprehension, rigid transformations, APOE Theory

INTRODUCCIÓN

La investigación, tiene como propósito describir y explicar cómo los estudiantes de grado sexto de una institución educativa de educación básica y media de Bogotá comprenden los conceptos de transformaciones básicas rígidas en el plano traslación, rotación, simetría y homotecia (TRSH), con fundamento en el enfoque teórico y metodológico APOE que se caracteriza por analizar las construcciones de las estructuras mentales de Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas, necesarias para la comprensión de

un objeto matemático, luego de participar en el ciclo de actividades, clases y ejercicios (ACE).

El trabajo investigativo pretendió superar dificultades que presentan los estudiantes de grado sexto y séptimo para comprender conceptos relacionados a la geometría y validar un modelo de aprendizaje que promueve la comprensión de las transformaciones de TRSH.

Al respecto, estas dificultades se evidencian en el bajo desempeño demostrado por los estudiantes en un test diagnóstico sobre la TRSH, que arrojó como resultado que un 80% de los estudiantes no describen los términos de simetría y homotecia, respecto a la rotación y reflexión poseen nociones intuitivas muy básicas; situaciones similares se encuentran en el desarrollo de las guías de aprendizaje relacionadas con el pensamiento geométrico y en las pruebas nacionales estandarizadas saber de grado noveno que indican un bajo nivel en la comprensión en la representación de objetos en plano cartesiano y en las transformaciones rígidas.

Según el diagnóstico, se revisaron las guías propuestas por la Institución para los grados cuarto y quinto, donde se encuentra que en las temáticas de transformaciones rígidas se proponen actividades básicas elementales, distantes a lo propuesto en los lineamientos curriculares y los estándares básicos en competencias para estos grados, situación que impide la potenciación de los aprendizajes, el avance más allá de la información conceptual y la generación de cuestionamientos ante diferentes formas y movimientos que se perciben al interactuar con el entorno, que motiven a establecer conjeturas y verificar resultados.

Por tanto, la investigación surge por el interés de diseñar, implementar y analizar cómo pueden ser los procesos de enseñanza y aprendizaje que permitan resolver ejercicios



o situaciones problemas relacionados con las transformaciones rígidas en el plano.

En esta dirección, se consultaron estudios relacionados con TRSH como el Beltrametti et al, (2004) quienes presentan una relación entre dos marcos teóricos para establecer niveles de comprensión de los conceptos y presentan estrategias mediadas con software para geometría dinámica; por otra parte, en los trabajos de Julio (2014) y Jaime (1993) aportan situaciones y estrategias para diseñar el ciclo ACE con una dialéctica entre los conceptos, el contexto, los roles del Docente y de los estudiantes; en Montes (2012) se dan a conocer Didácticas para suscitar la construcción de los conceptos como resultado de la discusión y la concertación.

MARCO TEÓRICO

La investigación se desarrolló con fundamento el marco teórico y metodológico APOE propuesto por Dubinsky (Dubinsky, 1991) quien extiende las ideas de la Teoría de Piaget (Piaget, 1985) del pensamiento matemático elemental al avanzado.

La teoría APOE establece que para comprender los objetos matemáticos con niveles progresivos de abstracción es a través de la abstracción reflexiva, considerada como la capacidad de activar mecanismos mentales para construir las estructuras mentales y reorganizarlas de la siguiente forma.

La comprensión de un concepto como acción se manifiesta cuando el sujeto, que está inmerso en un proceso de aprendizaje, al recibir una indicación o instrucción precisa por un agente externo sobre el paso a seguir, reacciona y realiza transformaciones u operaciones sobre los objetos (físicos o mentales) del contexto, los cuales percibe en su pensamiento.

Posteriormente, es posible que el sujeto al repetir estas acciones, reflexione sobre estas y

las pueda realizar de manera autónoma; cuando esta situación se evidencia, se afirma que las acciones por el mecanismo de *interiorización* se han comprendido como una estructura de *proceso*, la cual se manifiesta cuando se tiene la capacidad de representar a través de símbolos, lenguajes o imágenes mentales dicha acción; es decir tiene la capacidad de describir los pasos involucrados en la transformación e incluso *invertirlos* (Trigueros, 2005, p.9). Además, puede generar nuevos procesos por el mecanismo de coordinación de dos o más a través de la composición de éstos (Armón y otros, 2014).

En situaciones en que la estructura de proceso es concebida como una totalidad estática sobre la cual es posible realizar operaciones o transformaciones, se considera que el proceso por mecanismo de encapsulación se ha comprendido como un objeto (Suarez, 2019, p.48).

Por otra parte, en contextos cuando se requiere establecer las relaciones entre los elementos que constituyen un objeto, se afirma que el objeto se ha desencapsulado en el proceso que lo generó.

Finalmente, el sujeto ante un problema, en su intento para hallar la solución o cuando logra resolverlo, establece relaciones entre los elementos que configuran el concepto, demostrando la comprensión de éste ya sea como acción, proceso u objeto, manifestando la construcción de un *esquema* del concepto.

Además, la *generalización* del esquema de un concepto se evidencia cuando el sujeto se da cuenta y es capaz de aplicarlo en una gama más amplia de problemas.

Con el fin de describir la comprensión de un objeto matemático, en términos de las estructuras y mecanismos mentales se propone una ruta hipotética de aprendizaje denominada

descomposición genética DG, como resultado de un análisis histórico, epistemológico y didáctico del concepto.

METODOLOGIA.

La investigación tiene un enfoque mixto que implica un análisis tanto cualitativo como cuantitativo, que se caracteriza por describir y explicar el fenómeno de la comprensión de las TSRH, (Hernández, 2006).

PARTICIPANTES

En el estudio del fenómeno de la comprensión de la TSRH se organizó una muestra de 10

estudiantes de grado sexto en la ciudad de Bogotá (Colombia) que se identifican como (E1,..., E10), que en promedio tienen una edad de 11 años y participaron del ciclo ACE y desarrollaron un cuestionario. Los instrumentos se diseñaron y analizaron teniendo como referencia la DG.

FASES DE LA INVESTIGACION.

Se siguió el ciclo de investigación propuesto por el marco teórico y metodológico APOE, que integra tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza, y observación, análisis y verificación de datos, Ver Figura 1.

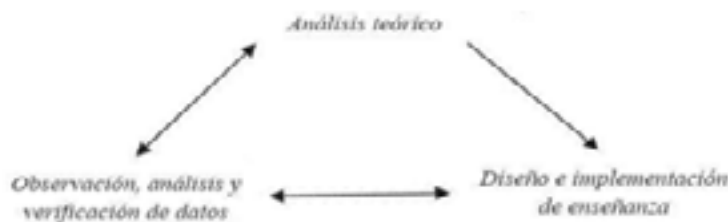


Figura 1. Ciclo de investigación

Nota: Tomado Arnon et al, p 94.

El análisis teórico comprendió el estudio histórico y epistemológico de las TRSH, que permitió establecer los elementos que configuran el concepto, las representaciones, las limitaciones de aprendizaje, las demandas cognitivas e institucionales y las estrategias didácticas.

Como resultado del análisis teórico se formuló la DG que describe la activación de los mecanismos mentales (interiorización, coordinación, inversión, encapsulación, desencapsulación y tematización) que posibilitan la construcción de las estructuras mentales (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) necesarias para comprender el concepto.

Luego se diseñó e implementó el ciclo ACE con el propósito de suscitar lo descrito en la DG. Finalmente se aplicó un cuestionario,

se recolectó y se analizó la información que permitió verificar si las construcciones mentales descritas en la DG se evidenciaron en los desempeños de los estudiantes.

DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA

ACCIONES.

1.a. (Material manipulativo) Acciones para: 1) trasladar objetos reales x unidades desde una posición origen a una posición destino en una dirección (arriba, abajo, izquierda, derecha, diagonal, norte, sur, oriente, occidente desde su posición inicial; 2) girar objetos reales alrededor de un centro de rotación un determinado ángulo θ en un sentido (horario o anti horario); 3) observar y analizar las imágenes de objetos cuando éstos se alejan o se acercan a un espejo; 4) describir



objetos que cambian de tamaño (ampliación o reducción) al aplicarles alguna transformación (estirar o encoger cauchos, inflar o desinflar globos).

1.b. Gráfico-numérico. Conocida la gráfica de un objeto en una posición original, realizar acciones de graficar la imagen y sus elementos, al aplicar al objeto las siguientes transformaciones: 1) una traslación x unidades en una dirección; 2) una rotación un ángulo θ grados en sentido horario alrededor de un punto fijo; 3) la simetría frente a un eje de simetría (espejo); 4) una ampliación o reducción. Acciones de comparar las gráficas y las propiedades de elementos del objeto origen y la imagen, medir los segmentos o arcos que describen cada transformación.

1.c. Gráfico-numérico. Acción de graficar en el plano cartesiano un polígono origen dadas las coordenadas de sus vértices y los segmentos que los unen y la transformación resultante luego de aplicar transformaciones enumeradas en la acción 1.b. En cada transformación graficar y medir los segmentos que unen los vértices del objeto origen y su transformación; caracterizar del polígono origen y de su imagen la forma, las medidas de los lados y ángulos.

PROCESOS.

2.a. Interiorizar las acciones 1.a, en los procesos que conocidas las características que definen un objeto, aplicar las transformaciones enumeradas en la acción 1.b, estableciendo en cada una las propiedades que se conservan y las que cambian del objeto origen y el transformado.

2.b. Gráfico-analítico. Interiorizar la acción 1.b, en el proceso que dado un objeto arbitrario, representar gráficamente estas transformaciones. Analizar y describir las propiedades que se conservan y las que cambian del objeto origen y de la imagen para cada transformación.

2.c. Interiorizar la acción 1.c en los procesos que conocidos los vértices de un polígono arbitrario, representarlo gráficamente en el plano cartesiano y aplicar transformaciones enumeradas en la acción 1.b. Analizar las propiedades que se conservan y las que cambian.

2.d. Coordinar los procesos 2.b y 2.c para obtener nuevas transformaciones al componer: 1) traslaciones; 2) rotaciones, 3) simetrías axiales y 4) homotecias. Analizar la transformación resultante y la conservación de propiedades.

2.e. Invertir el proceso 2.c en el proceso que dada la imagen de un objeto transformado y los elementos que la generaron, graficar y determinar el objeto origen, luego de aplicar alguna transformación, TRSH.

Objetos.

3.a. Encapsular el proceso 2.c en el objeto: traslación, rotación, simetría y homotecia, TRSH.

DISEÑO DEL CICLO ACE

Con referencia en la DG, se diseñaron actividades que se implementaron a través de clases y ejercicios para promover las construcciones de TRSH. A continuación se muestran algunas representativas, indicando la sección correspondiente a la DG y la descripción de la actividad.

ACTIVIDADES

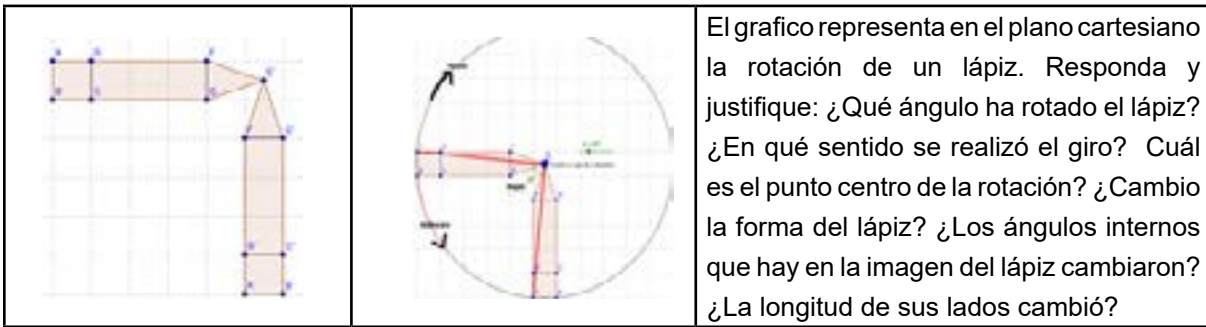
Acciones **1.a** de la DG. Identificar y describir movimientos de elementos en su contexto, relacionarlos en los apuntes y clasificarlos según sus características. Con esta información, se selecciona un objeto y se da las instrucciones para efectuar una transformación. Por ejemplo trasladar el borrador 5 cm hacia la derecha.

Acciones **1.b** de la DG, el estudiante representa gráficamente el objeto que ha movido, su imagen y describe las características.

Acciones 1.c de la DG, el docente complementa las actividades anteriores, graficando polígonos en el plano cartesiano que representan objetos del entorno y la transformación aplicada, en el

tablero o mediados con software como geogebra con animaciones. En la Figura 2, se muestra para el caso de la rotación.

Figura 2. Rotación de la imagen de un lápiz.



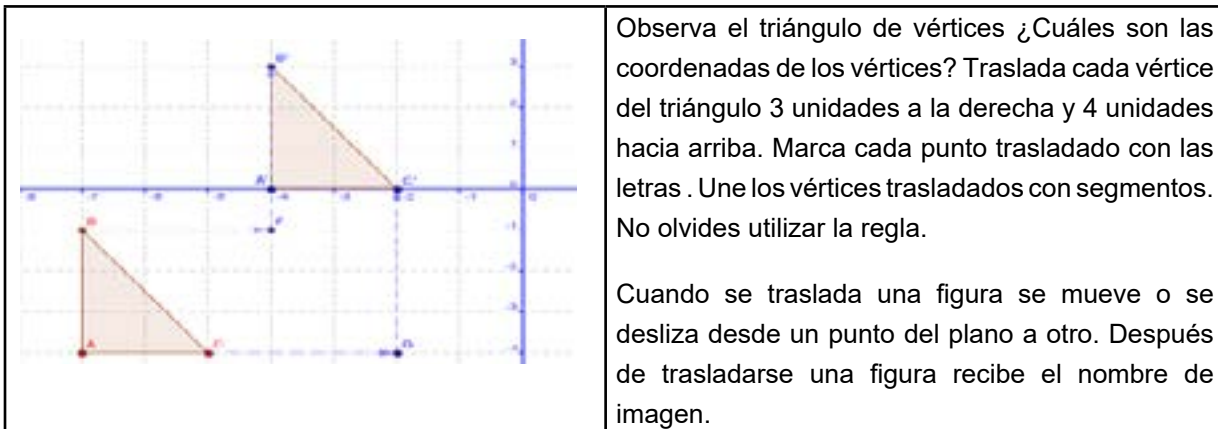
Nota: Elaboración propia.

Los estudiantes realizaron actividades similares utilizando elementos de dibujo. Luego se socializó y se indagó sobre pasos que siguieron, las

características conservativas y no conservativas de la figura original, la imagen y los elementos que componen cada transformación.

Procesos 2.a, 2.b y 2.c de la DG. Figuras 3 a 5.

Figura 3. Traslación del triángulo ABC



Nota: Elaboración propia.

Figura 4. Rotación del cuadrilátero ABCD.

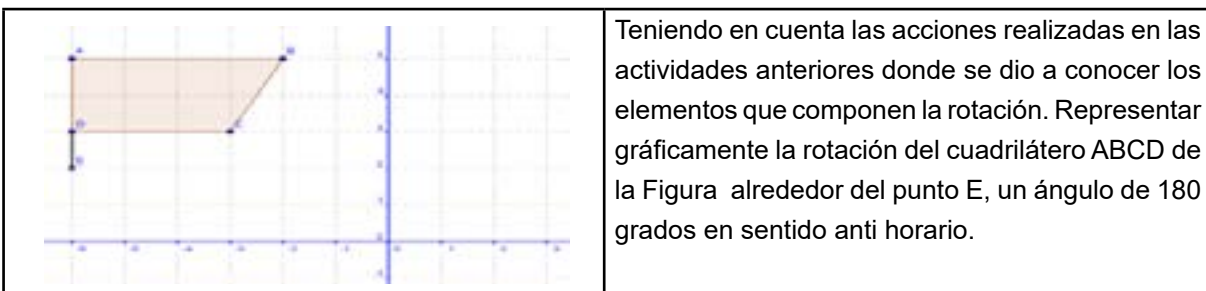
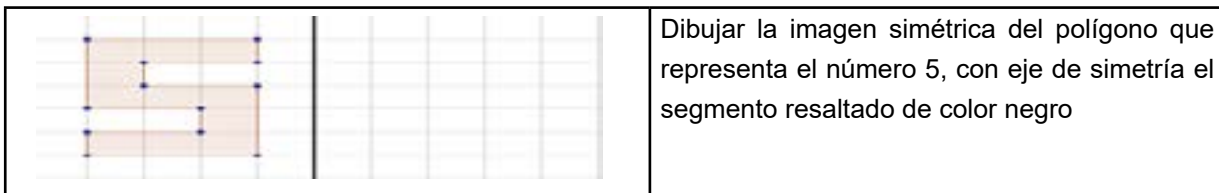


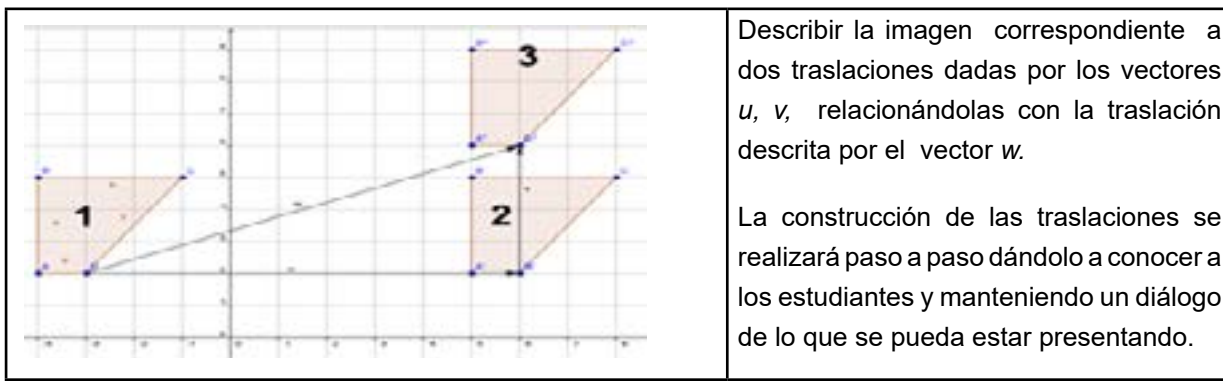
Figura 5. Simetría de un polígono



Nota: Elaboración propia.

Procesos 2.d y 2.e de la DG. Ver Figura 6.

Figura 6. Composición de traslaciones.



Nota: Elaboración propia.

Objeto 3.a de la DG. Graficar el triángulo que tiene como puntos vértice $A(13,1)$, $B(13,3)$, $C(15,3)$ y trasladarlo 4 unidades a la izquierda, a la imagen obtenida aplicarle una rotación de 90 grados alrededor del punto C. Luego realizar una simetría a la imagen obtenida respecto al eje x . A la imagen simétrica aplicarle una homotecia con razón $k=2$ con centro el punto $(2,0)$. Escribir las coordenadas de los puntos vértice de cada imagen obtenida.

En el Cuadro 1, se presenta el cuestionario diseñado según la DG y aplicado para la recolección y análisis de la información.

Cuadro 1. Cuestionario sobre TRSH

Tarea 1. Acciones 1.a, 1.b, procesos 2.a y 2.b de la DG.

a. Dibujar el pocillo de la siguiente Figura, luego trasladarlo 5 cm a la derecha. Describir su movimiento.



b. Representar gráficamente y describir la rotación de la manecilla del horario del reloj cuando son las 12:00 y su movimiento hasta marcar las 3:00.

c. Escoger un objeto, ubicarlo frente a un espejo. Dibujar el objeto, el espejo y la imagen. Describir la gráfica.

d. Graficar un globo de fiesta inflado a media capacidad, dibujar el mismo globo cuando está a capacidad completa y comparar las dos graficas de los globos.

Tarea 2. Acciones 1.c y proceso 2.c de la DG

a. Graficar el triángulo con vértices en el plano cartesiano los puntos: A(-2,4), B(3,2), C(3,6), la traslación de 11 unidades a la derecha. Responda y justifique: ¿En qué dirección se realizó la traslación? ¿Los ángulos internos, externos, la longitud de sus lados cambiaron al realizar la traslación? ¿Cambio su forma, su área o su perímetro?

b. Representar gráficamente en el plano cartesiano la rotación del cuadrilátero que tiene por vértices A(4,4), B(7,4), C(7,2), D(4,3) alrededor del punto E(7,1), un ángulo de 180 grados en sentido anti horario. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos vértice de la imagen? ¿Qué diferencias o semejanzas tiene el polígono origen y su imagen luego de aplicar una rotación, respecto a: la longitud de los lados, la amplitud de los ángulos internos, los segmentos que componen el polígono?

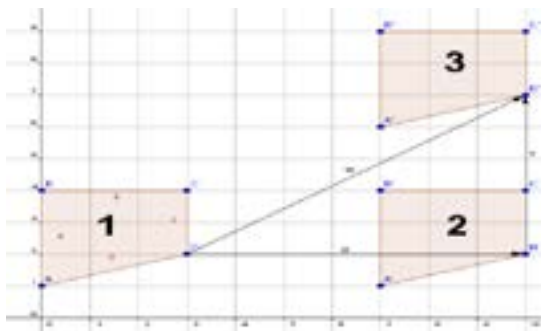
c. Representa la simetría del polígono que tiene como vértices A(-1,2), B(0,4), C(2,1) respecto al eje x

d. Representar el homotético de triángulo A (2,3), B (2,1), C (3,1) de centro el origen y razón $k=3$. ¿Cuál es la relación entre la amplitud de los ángulos internos del triángulo y los de su homotético? ¿Qué relación hay entre la longitud de la base del triángulo original y la longitud de la base del homotético? ¿Qué ocurre con el tamaño y la forma del homotético cuando la razón es de: tres, uno, menor que uno y mayor que cero, negativa?

Tarea 3. Procesos 2.d y 2.e de la DG

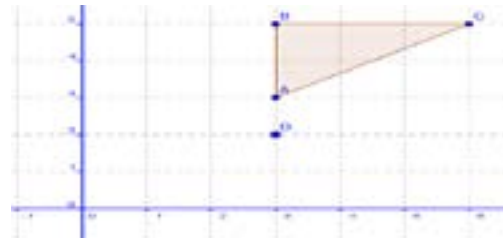
a. Describa las traslaciones que se presentan en la Figura 7, asuma que el polígono etiquetado con el número 1 es el original y los polígonos etiquetados con los números 2 y 3 son sus imágenes. ¿Cuáles son las coordenadas del polígono trasladado la primera vez? ¿Las medidas de los ángulos internos y de los lados del rectángulo en cada traslación cambio? ¿Qué elementos forman la traslación?

Figura 7. Traslaciones del cuadrilátero ABCD



- b. Representar gráficamente y describir la rotación del triángulo ABC de la Figura 8 alrededor del punto D, en sentido anti horario, un ángulo de 90 grados, luego a la imagen aplicarle una rotación de 180 grados (horario o anti horario) alrededor del punto D.

Figura 8. Rotación del triángulo ABC



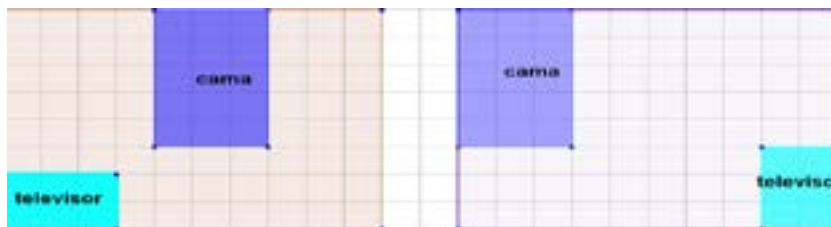
¿Cómo son las longitudes de los lados y las amplitudes de los ángulos del triángulo original y de la imagen? ¿Si al triángulo ABC se le realizó una rotación de 90 grados y después a la que se obtuvo otra de 180 grados? ¿Qué ocurre si solo se hubiese hecho una sola rotación un ángulo correspondiente a la suma de los 2 ángulos indicados?

- c. Representar gráficamente el polígono que tiene como vértices los puntos A(-3,3), B(-1,-2), C(-2,-1), la simetría de éste polígono con respecto al eje y, a la imagen aplicarle una simetría respecto al eje x
- d. Representar el homotético del triángulo con vértice las coordenadas A (3, 3), B (4,1), C (7, 1), con centro el origen y razón $k=2$, Luego realizar la homotecia del homotético anterior con una razón de uno y centro en el origen

Tarea 4. Objeto 3.a de la DG.

- a. Graficar el triángulo que tiene como puntos vértice A(13,1), B(13,3), C(13,5) y las siguientes transformaciones: trasladarlo tres unidades a la izquierda, a la imagen obtenida realizarle una rotación de 90 grados alrededor del punto C en sentido horario, luego a esta segunda imagen, realizarle una simetría respecto al eje x, a la última imagen realizarle una homotecia con una razón de $k=2$ con centro de homotecia el punto
- b. Luis organizo su cuarto, cambio de lugar la cama y el televisor como se indica en la Figura 10. ¿Qué movimientos aplico Luis a sus cosas? ¿En qué medida?

Figura 10. Plano de una habitación



**ANÁLISIS**

Siguiendo la DG, la información sobre las tareas del cuestionario se organizó como se muestra en la Tabla 1. En la primera columna se presentan

las estructuras mentales, en la segunda los descriptores de la DG, en la tercera los ítems de las tareas correspondientes y en la cuarta los indicadores que permiten inferir la comprensión la TRSH.

Tabla 1. Relación de estructuras, categorías y tareas

Estructuras mentales	DG	Tareas	Indicadores
Acción	1.a	1.a	Representa en forma gráfica y verbal la traslación del objeto según la magnitud y la orientación.
		1.b	Representa en forma gráfica y verbal la rotación del objeto según el ángulo de giro
	1.b	1.c	Representa en forma gráfica y verbal la simetría del objeto.
		1.d	Representa en forma gráfica y verbal la transformación del globo inflado a media capacidad y a capacidad completa
	1.c	2.a, 2.b, 2.c, 2.d	Representa en el plano cartesiano en forma gráfica y verbal los polígonos origen e imagen al aplicar transformaciones TRSH
Proceso	2.a	1.a	Establece que el objeto trasladado, rotado o reflejado conserva todos sus elementos, las medidas y la forma. Grafica los segmentos representativos de la traslación, asigna medidas y establece la dirección.
		1.b	Grafica el centro, los arcos representativos de la rotación y asigna medidas a los ángulos.
	2.b	1.c	Representa gráficamente la reflexión del objeto y determina las medidas de los segmentos que la definen.
		1.d	Representa las homotecias del globo y analiza propiedades conservativas y no conservativas.
	2.c	2.a	Identifica los elementos que definen una traslación, una rotación, una simetría y una homotecia, las representa respectivamente en el plano cartesiano al aplicarla a un polígono, compara los ángulos internos y externos, el área y el perímetro del objeto origen y el transformado.
		2.b	
		2.c	
		2.d	
	2.d	3.a	Representa gráfica y verbalmente la composición de traslaciones, rotaciones, simetrías y homotecias aplicadas a polígonos en el plano cartesiano; infiere la transformación resultante, establece e identifica sus elementos y determina las propiedades que se conservan
		3.b	
3.c			
3.d			
OBJETO	3.a	4.a	Representa gráfica y verbalmente la composición de transformaciones rígidas aplicadas en diferente orden a polígonos en el plano cartesiano, establece e identifica sus elementos y determina las propiedades que se conservan y las que cambian
		4.b	Describe e identifica la composición de transformaciones que se aplican a objetos en situaciones del contexto.

RESULTADOS

La información sobre el desempeño de los estudiantes en el cuestionario se recolectó y se analizó según los criterios de la Tabla 1, permitiendo describir y explicar la comprensión de la siguiente forma: los estudiantes E2 y E7, demostraron comprender la TSRH como acción, que se manifiesta por la representación gráfica

y la descripción de manera general e intuitiva de las transformaciones de traslaciones y homotecias de objetos, ver imágenes 1 y 2. No se evidencia el análisis de la conservación de sus propiedades, presentan dificultades para representar polígonos regulares en el plano cartesiano, por tanto no pueden representar y analizar TRSH de éstos.

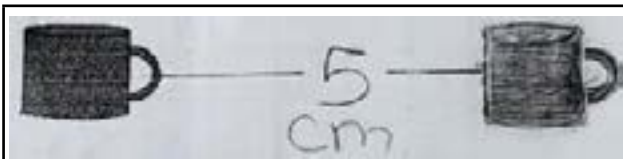


Imagen 1. Respuesta del E2 a la Tarea 1.a



Imagen 2. Respuesta de E7 a la Tarea 1.d

Los estudiantes E3, E4, E5, E6, E8, E9, E10, comprenden la TRSH como proceso, porque además de realizar acciones, representan en forma gráfica y verbal sin marcos referenciales

o en plano cartesiano TRSH de polígonos regulares, identifican sus elementos, establecen la conservación o no de la forma, la medida de sus ángulos, aristas, áreas, perímetros, como se muestra en las imágenes 3 y 4.

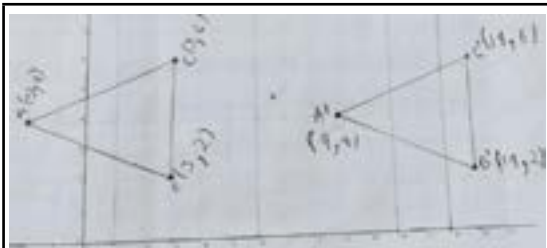


Imagen 3. Respuesta de E3 a la Tarea 2.a

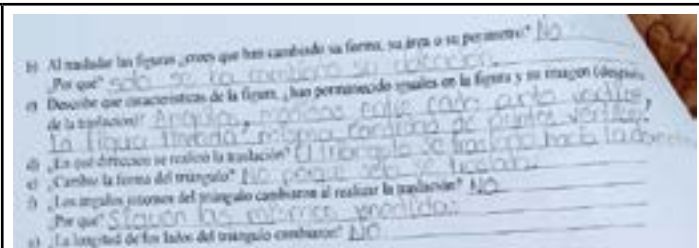


Imagen 4. Respuesta de E4 a la Tarea 1.a

Además, representan en forma gráfica y verbal la formación de nuevas transformaciones resultado de la composición de traslaciones, rotaciones, ver imágenes 5 y 6, y analiza las propiedades que se conservan.

"La figura 1 se traslada 6 unidades hacia la derecha y esta se llama imagen 2. Se traslada 4 unidades hacia arriba y esta se llama imagen 3. Si unimos ciertos puntos de las 3 figuras se forma un triángulo".

La figura 1 se traslada 6 unidades hacia la derecha y esta se llama imagen 2. Se traslada 4 unidades hacia arriba y esta se llama imagen 3. Si unimos ciertos puntos de las 3 figuras se forma un triángulo.

Imagen 5. Respuesta de E4 a la Tarea 3.a

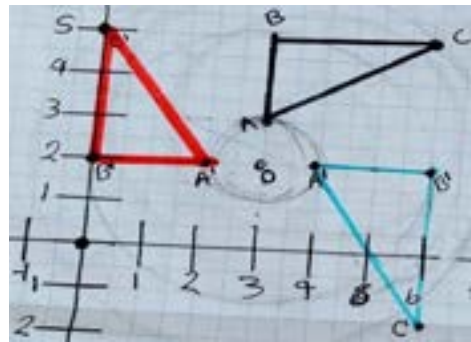


Imagen 6. Respuesta de E5 a la Tarea 3.b

Respecto a la composición de simetrías, las representan gráfica y verbalmente verificando que el orden en que se aplican genera la misma transformación compuesta, ver imagen 7; sobre la composición de homotecias analiza el efecto

de la razón en la variación de las medidas de las aristas, áreas y el perímetro del polígono mientras que se conserva la medida de los ángulos y la forma, ver imagen 8.

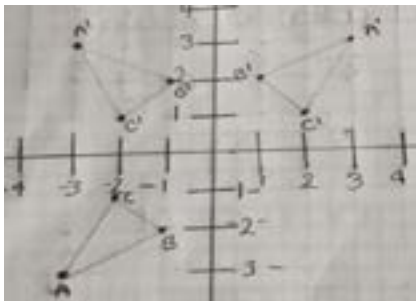


Imagen 7. Respuesta de E6 a la Tarea 3.c

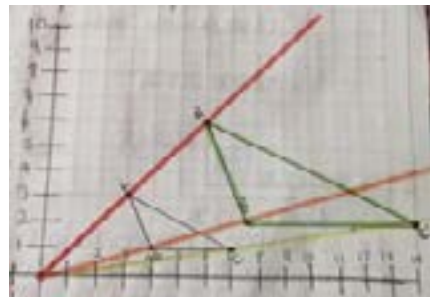


Imagen 8. Respuesta de E8 a la Tarea 3.d

La comprensión como objeto de la TRSH la evidencia el estudiante E1, como se muestra en la imagen 9 y 10, porque logra realizar y representar correctamente la composición de las cuatro transformaciones, identifica propiedades conservativas y no conservativas de la figura original y su imagen, describe correctamente las transformaciones aplicadas en una situación del contexto.

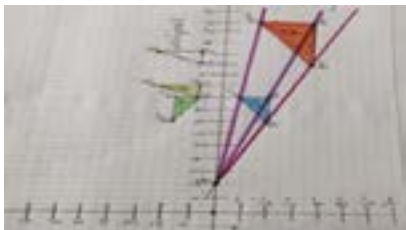


Imagen 9. Respuesta de E1 a la Tarea 4.a

Televisor: se realizó una rotación a partir del punto G en sentido horario después una traslación de 5 unidades
 Cama: se trasladó 4 unidades hacia la izquierda

Imagen 10. Respuesta de E1 a la Tarea 4.b

“televisor: se realizó una rotación a partir del punto G en sentido horario después una traslación de 5 unidades

Cama: se trasladó 4 unidades hacia la izquierda”.

CONCLUSIONES

La implementación del ciclo ACE, fundamentado en la DG permitió corroborar lo que afirma Piaget y que retoma la teoría APOE, sobre la forma de enseñar conceptos de geometría, que consiste en iniciar con acciones o manipulación de objetos del contexto, luego interiorizarlas al representar estas operaciones o transformaciones (asimilación), posteriormente relacionar los elementos, establecer propiedades y coordinar operaciones con otras previamente construidas para formar estructuras mentales que corresponden a formas de comprender los objetos (acomodación).

Durante el fenómeno de la comprensión, es importante la retroalimentación, el acompañamiento, la interacción y trabajo en grupo, el uso de medios como el software de geometría dinámica geogebra que se utilizó en esta investigación, que proporcionan escenarios que favorecen la abstracción reflexiva para formar de esquemas mentales necesarios para resolver ejercicios y situaciones problema.

El enfoque teórico y metodológico APOE, proporciona herramientas para describir y explicar el fenómeno de la comprensión, aportando al desarrollo de la didáctica de la matemática, no sólo en el pensamiento matemático avanzado, sino en el elemental y

en el tránsito entre estos, como se evidenció en esta investigación, generando como resultados trayectorias de aprendizaje, probadas, refinadas y validadas para la enseñanza y aprendizaje de conceptos fundamentales en matemáticas como las transformaciones rígidas en el plano.

La formación de esquemas mentales de las TRSH, favorecerá y deja abierta la posibilidad de continuar investigaciones sobre la comprensión fundamentados en la teoría APOE de otros conceptos de la matemática como el de función, transformaciones lineales y no lineales, cuerpos geométricos, la noción de volumen, geometría proyectiva, entre otros.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS:

- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory, A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer Science.
- Beltrametti et al. (2004). *Análisis de la evolución de los niveles de pensamiento geométrico en la construcción del concepto de Transformaciones Rígidas del Plano según la Teoría de Van Hiele y el empleo del Soft Cabri Géomètre de estudiantes del Profesorado*



- en *Matemática. Comunicaciones Científicas y Tecnológicas*, 4.
- Dubinsky citado por Jaimes, Chaves y Vargas. (2017). *La descomposición genética como herramienta para matemáticos, ingenieros y licenciados en la enseñanza del cálculo: investigación en educación matemática*. 6.
- Font, Badillo, Trigueros y Rubio. (2012). *La encapsulación de procesos en objetos analizada desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico*. 246.
- Hernández, R. (2006). *Metodología de la investigación*. Sexta Edición. Mc Graw Hill Educación.
- Jaime, A (1993). *Aportaciones a la interpretación y la aplicación del modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento. Universidad de Valencia. Departamento de didáctica de la matemática. Tesis Doctoral, Valencia*.
- Julio, L (2014). *Las transformaciones en el plano y la noción de semejanza. En L. J. Barrera, Las transformaciones en el plano y la noción de semejanza. (pág. 89). Bogotá*.
- Montes, S. (2012). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de transformaciones geométricas en el plano con estudiantes de grado séptimo haciendo uso del entorno visual del juego pac-man. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá D.c, Colombia*.
- Piaget, J. (1985). *Psicología y pedagogía*. Buenos Aires: Ariel.
- Pirie y Kieren citados por Meel. (2003). *Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE*. revista oficial del comité latino americano de matemática educativa A.C., 4.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2006). *El desarrollo del esquema de derivada*. Enseñanza de las ciencias, 2006, 24
- Salazar, A. (2017). *Estrategia didáctica para la enseñanza y aprendizaje de las transformaciones en el plano cartesiano en el grado sexto*. Bogotá, Colombia. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de ciencias.
- Suarez, Z. (2019). *La cognición y la enseñanza del concepto de diferencial, desde la teoría APOE. Un aporte a la formación de profesores en matemáticas*. Colección tesis doctorales Uptc Rudecolombia.
- Trigueros. (2005). *La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior*. Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal, 8-12.