

RECIBIDO EL 18 DE JULIO DE 2022 - ACEPTADO EL 19 DE SEPTIEMBRE DE 2022

# Errores asociados a operaciones aditivas con fracciones: un estudio exploratorio con estudiantes de secundaria

## Errors associated with additive operations with fractions: an exploratory study with high school students

## Erros associados a operações aditivas com frações: um estudo exploratório com alunos do ensino médio

**Wilmer Ríos-Cuesta<sup>2</sup>**

Universoidad de Valle

**Omar Harry Asprilla-Mena<sup>3</sup>**

Universidad de Medellín

1 Artículo derivado del proyecto de investigación titulado: Resolución de operaciones aditivas con números fraccionarios mediados por el software GeoGebra con estudiantes de séptimo grado, financiado por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia mediante la beca de Maestría en Educación para el segundo autor.

2 Doctor (c) en Educación por la Universidad del Valle. Wilmer Ríos-Cuesta, <https://orcid.org/0000-0001-8129-2137>, [wilmer.rios@correounivalle.edu.co](mailto:wilmer.rios@correounivalle.edu.co)

Facultad de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle

3 Magister en Educación por la Universidad de Medellín. Omar Harry Asprilla-Mena, <https://orcid.org/0000-0003-0898-2304>, [oasprilla307@soyudemedellin.edu.co](mailto:oasprilla307@soyudemedellin.edu.co)  
Facultad de Ciencias Sociales y Humanas, Universidad de Medellín

### Resumen

Se presenta un estudio de casos exploratorio de naturaleza cualitativa y corte descriptivo situado en un paradigma interpretativo, cuyo propósito fue identificar los errores asociados a las operaciones aditivas con fracciones, de estudiantes, entre los 11 y 16 años, que cursan séptimo grado de secundaria de una institución educativa pública del municipio de Quibdó. La

muestra estuvo conformada por ciento noventa y cinco estudiantes a las cuales se les aplicó una evaluación diagnóstica para verificar su nivel de comprensión sobre esta temática en particular. Se parte del hecho de que los Derechos Básicos de Aprendizaje en Colombia señalan que, en este grado, los estudiantes pueden resolver problemas que involucran diversas operaciones con racionales en distintos contextos. Los resultados muestran que las estudiantes realizan sumas de los numeradores y denominadores como si fueran dos números enteros independientes, se identificó también que cuando las fracciones tienen el mismo numerador lo que hacen las estudiantes es mantenerlo y sumar los denominadores. Asimismo, se comenten errores al usar algoritmos, pues no se tienen en cuenta si las fracciones son homogéneas o heterogéneas y no se ofrece como respuesta una fracción irreducible. Se concluye que las estudiantes comenten errores que permiten inferir una falta de comprensión sobre cómo se resuelven operaciones que implican sumar o restar fracciones, así como también, una dificultad para comprender el significado del concepto de fracción de acuerdo con la situación.

**Palabras clave:** racionales, suma y resta de fracciones, errores, conocimientos previos.

### Abstract

This is an exploratory case study of qualitative and descriptive nature located in an interpretative paradigm, whose purpose was to identify the errors associated with the additive operations with fractions, of students between 11 and 16 years old, who are in the seventh grade of secondary school in a public educational institution in the municipality of Quibdó. The sample consisted of one hundred and ninety-five students who underwent a diagnostic evaluation to verify their level of understanding of this topic. It is assumed that the Basic Learning Rights in Colombia state that, in this grade, students can

solve problems involving various operations with rationals in different contexts. The results show that students add numerators and denominators as if they were two independent whole numbers, and it was also identified that when fractions have the same numerator, students keep it and add the denominators. Likewise, mistakes are made when using algorithms, since they do not consider whether the fractions are homogeneous or heterogeneous and an irreducible fraction is not offered as an answer. It is concluded that students make mistakes that allow inferring a lack of understanding of how to solve operations that involve adding or subtracting fractions, as well as a difficulty in understanding the meaning of the concept of fraction according to the situation.

**Keywords:** rationals, addition and subtraction of fractions, errors, prior knowledge.

### Resumo

Trata-se de um estudo de caso exploratório de natureza qualitativa e descritiva situado em um paradigma interpretativo, cujo objetivo era identificar os erros associados às operações aditivas com frações, de alunos entre 11 e 16 anos de idade, que estão na sétima série do ensino médio em uma instituição pública de ensino no município de Quibdó. A amostra consistiu em cento e noventa e cinco estudantes que foram submetidos a uma avaliação diagnóstica para verificar seu nível de compreensão deste tópico em particular. Presume-se que os Direitos Básicos de Aprendizagem na Colômbia afirmam que, nesta série, os alunos podem resolver problemas que envolvem várias operações com racionalizações em diferentes contextos. Os resultados mostram que os estudantes adicionam numeradores e denominadores como se fossem dois números inteiros independentes, e foi identificado que quando as frações têm o mesmo numerador, os estudantes mantêm o numerador e adicionam os denominadores. Da mesma forma, são cometidos erros ao se utilizar

algoritmos, pois eles não levam em conta se as frações são homogêneas ou heterogêneas e não oferecem uma fração irreduzível como resposta. Conclui-se que os alunos cometem erros que nos permitem inferir una falta de compreensão de como resolver operações que envolvem adicionar ou subtrair frações, bem como una dificuldade em compreender o significado do conceito de frações de acordo com a situação.

**Palavras-chave:** frações racionais, adição e subtração de frações, erros, conhecimento prévio.

### Introducción

Uno de los contenidos con mayores dificultades para los estudiantes en los distintos niveles educativos es la resolución de problemas con fracciones (Bufo *et al.*, 2018; Fernández & Llinares, 2010; Perera & Valdemoros, 2009). Los estudiantes experimentan dificultades para aprender el concepto de fracción y usarlo en situaciones nuevas. Algunas de las razones por las cuales sucede esto es por la riqueza conceptual de este objeto matemático (Kieren; 1980; 1992), el cual, a veces, se invisibiliza por la mecanización de algoritmos que se enseñan sin una conexión entre sus distintas representaciones (Ríos-Cuesta, 2021; Mendoza, 2018).

En el caso particular de Colombia, la enseñanza de las fracciones comienza en el grado tercero donde se espera que los estudiantes utilicen “las razones y fracciones como una manera de establecer comparaciones entre dos cantidades” (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2016, p. 23). En su recorrido por los otros grados escolares, los estudiantes deben haber alcanzado los conocimientos suficientes para que en el grado séptimo utilicen “diferentes relaciones, operaciones y representaciones en los números racionales para argumentar y solucionar problemas en los que aparecen cantidades desconocidas” (MEN, 2016, p. 54).

En el diseño y elaboración de las actividades de aprendizaje, el profesor debe tener en cuenta lo que los estudiantes conocen para poder ayudarles a buscar las relaciones con el nuevo conocimiento, también, debe conocer los posibles errores asociados al objeto de estudio con la finalidad de guiarlos y promover su superación (Ríos-Cuesta, 2020). En este proceso, es importante la realización de estudios exploratorios que den cuenta de esos saberes previos y concepciones sobre el objeto matemático para la construcción de unidades didácticas que favorezcan en los estudiantes estados de conocimiento más avanzados (Ausubel *et al.*, 1986; National Council of Teachers of Mathematics, 2000; Ríos-Cuesta, 2021).

De acuerdo con lo anterior, el objetivo de este estudio es identificar y caracterizar los errores sobre operaciones aditivas con fracciones de un grupo de estudiantes de séptimo grado de una institución educativa pública en el municipio de Quibdó, como parte de un estudio más amplio que pretende determinar el impacto de una unidad didáctica mediada por el software GeoGebra en la resolución de operaciones aditivas con fracciones.

### Estudios previos sobre operaciones aditivas con fraccionarios

Estudios recientes señalan que entender el significado de las fracciones es crucial en las prácticas sociales y en el éxito en áreas como el álgebra, además, lo relacionan con el ingreso a las profesiones STEM (Bouck *et al.*, 2020; Hansen *et al.*, 2017; Kiili *et al.*, 2018). Sin embargo, es un contenido difícil de aprender y enseñar tanto en educación primaria como en secundaria. Autores como Brijlall (2014) estudiaron la adición de fracciones con 42 estudiantes de secundaria, en un contexto rural, utilizando un marco de ecología del aprendizaje y consolidado por el socioculturalismo y el aprendizaje situado. Las tareas eran de carácter

práctico y vivencial lo cual permitió que los estudiantes logaran un aprendizaje eficaz de este objeto matemático. Otros investigadores como Hui-Chuan (2014) compara mediante una prueba los conocimientos conceptuales y la competencia procedimental sobre la adición de fracciones de una muestra de 1209 estudiantes de Inglaterra y Taiwán, de 12 y 13 años. Las diferencias estadísticamente significativas entre ambos grupos se encuentran en la aplicación eficaz de algoritmos para resolver las sumas de fracciones frente al otro grupo en el que el 30% realizaba sumas de numeradores y denominadores, por ejemplo,  $2/3 + 1/7 = 3/10$ . Este estudio aporta pruebas que demuestran que la comprensión de las fracciones por parte de los alumnos es confusa e incompleta, incluso la de aquellos que son capaces de realizar las operaciones con éxito.

Por otro lado, Heemsoth y Heinze (2014) se apoyan en los resultados positivos sobre la reflexión de errores en la adquisición de conocimientos y estudian la reflexión sobre ejemplos incorrectos en un grupo de 195 estudiantes de grado sexto. Uno de sus principales resultados señala que los estudiantes avanzados se beneficiaron con esta estrategia mientras que, los estudiantes con bajos conocimientos previos, aprendían más con ejemplos correctos.

Lortie-Forgues *et al.* (2015) mediante una revisión bibliográfica, tratan de explicar por qué la aritmética de las fracciones es un contenido difícil de aprender. Encontraron dos causas principales que explican este fenómeno, el primero se relaciona con la naturaleza del concepto y su aritmética y la segunda con los procesos de enseñanza los cuales pueden reducirse si se mejora la instrucción y los conocimientos previos de los estudiantes. Esta investigación en particular apunta a lo que se hemos expresado sobre la utilidad de que los profesores conozcan los errores de los estudiantes al resolver problemas para

ayudarles a avanzar en la comprensión de los objetos matemáticos. Conociendo algunas de las dificultades en las tareas sobre fracciones reportadas en la literatura, Kar (2015) investigó la relación de las estructuras semánticas de los problemas planteados por estudiantes de sexto grado de secundaria para la adición de fracciones y cómo estas afectan su rendimiento en el planteamiento de problemas. Las tareas de investigación consistían en plantearle a los estudiantes operaciones simbólicas para que ellos construyeran dos problemas relacionados con la vida cotidiana que se relacionaran con las operaciones dadas. Entre sus resultados destaca el hecho de que la ejecución de un algoritmo y su aplicación de manera correcta no garantiza una comprensión conceptual, además, hay dificultades para transformar las expresiones simbólicas a expresiones verbales; se identificó que los errores al operar fracciones se relacionan con los conocimientos conceptuales que poseen.

### Referente teórico

#### El error en matemáticas

Es usual encontrarse en el aula de clases con estudiantes que presentan dificultades al resolver una tarea o que entregan una respuesta que no satisface el problema que se quiere resolver o simplemente no son capaces de responder a lo que se les pregunta. En algunas ocasiones estas dificultades se deben a la demanda cognitiva de la tarea la cual puede estar por encima de la Zona de Desarrollo Próximo del estudiante (Vygotsky, 1979), a la falta de conocimiento o a un estado de conocimiento no adecuado que le permita desarrollar la comprensión necesaria para resolver la tarea. Batanero *et al.* (1994) señalan que algunas dificultades se relacionan con el concepto que se está aprendiendo, con el método de enseñanza utilizado por el profesor o con los conocimientos previos del estudiante; también afirman que frecuentemente es posible descubrir regularidades o patrones en ellos que

permiten asociarlos. Este hecho en particular nos lleva a plantear una caracterización de los errores de las estudiantes al resolver problemas aditivos con fracciones.

Identificar los errores que comenten los estudiantes es fundamental para que el profesor pueda planear la situaciones o tareas siguientes que les permitan superarlos y avanzar en la construcción conceptual del objeto matemático. Además, permite reconocer las deficiencias en las técnicas empleadas por los estudiantes en la resolución de los problemas (Radatz, 1980). Esta información puede ser usada por el profesor para acceder a los *modos de comprender* y *modos de pensar* de los estudiantes. Harel (2008) define los primeros como un producto cognitivo de los actos mentales y los segundos como una característica cognitiva de estos. Desde esta perspectiva, el *modo de comprender* propiciaría hacer *inferencias* de los *modos de pensar* sobre el objeto de estudio, información que puede ser usada por el profesor para orientar su actividad mediadora a fin de influir en los procesos constructivos del estudiante y así afectar sus modos de comprender y hacerlos evolucionar hacia otros estados que les permitan aprender matemáticas.

### **Caracterización de los errores desde la propuesta de Radatz**

Para lograr la caracterización de los errores se usa la herramienta analítica propuesta por Radatz (1979) que busca comprender las posibles causas procedimentales relacionadas con la estructura cognitiva de los estudiantes. Su propuesta se compone de cinco tipos de errores:

- i. Errores asociados al lenguaje, perspectiva en la cual se relacionan los problemas del uso de la simbología y los conceptos matemáticos, es decir, de tipo semántico.
- ii. Errores relacionados con extracción de información visual y su relación con el pensamiento espacial.
- iii. Errores debido a saberes previos deficientes que constituyen un obstáculo para la resolución de manera exitosa de los problemas. Estas deficiencias se relacionan con el mal uso de algoritmos, mala aplicación de procedimientos y técnicas, así como el manejo de símbolos.
- iv. Errores por asociaciones incorrectas que producen rigidez del pensamiento, los cuales inciden en la codificación y descodificación de la información nueva promovida por la experiencia con problemas similares y hace que los estudiantes piensen que los problemas se resuelven de la misma manera.
- v. Errores por aplicación de reglas provenientes de otros contenidos que no siempre guardan relación con el objeto en cuestión.

### **La noción sobre concepciones**

Goodenough (1990) ofrece una aproximación a la noción de concepciones como aquellas aserciones que se ofrece un individuo sobre un tema en particular sin que esto constituya una verdad objetiva. Ponte (1994) señala que las concepciones aluden a macroorganizadores implícitos en los conceptos y que condicionan la forma como se abordan las tareas. Sin embargo, las concepciones sobre un objeto pueden cambiar como consecuencia de las prácticas de enseñanza y aprendizaje (Fernández-Ruiz & Panadero, 2020; Martín *et al.*, 2006). Paternina y Quessep (2017) afirman que las concepciones ayudan a organizar los conceptos que posee un individuo y son de naturaleza cognitiva.

## Metodología

Este estudio de casos exploratorio es de naturaleza cualitativa y corte descriptivo situado en un paradigma interpretativo (Basse, 1999), su propósito fue identificar y caracterizar las concepciones y errores sobre operaciones aditivas con fracciones.

## Participantes

En este estudio participaron 195 estudiantes de grado séptimo de una institución educativa pública del municipio de Quibdó, sus edades oscilan entre los 11 y 16 años las cuales conforman un caso único de estudio. Las estudiantes aceptaron participar voluntariamente de este estudio el cual hace parte de una investigación más amplia desarrollada en el marco de la Maestría en Educación de la Universidad de Medellín en Colombia. Para referirnos a las producciones individuales de las estudiantes se codificaron como E1, E2, ..., E195 con el propósito de proteger sus identidades.

## Instrumento de recolección de datos

El instrumento utilizado para la recolección de la información fue una evaluación diagnóstica compuesta por 16 preguntas para verificar

lo que establece el Ministerio de Educación Nacional de Colombia en los Derechos Básicos de Aprendizaje donde se menciona que los estudiantes en grado séptimo pueden resolver problemas que involucran diversas operaciones con racionales en distintos contextos (MEN, 2016). Este instrumento fue validado mediante juicio de expertos dentro de uno de los seminarios de formación de la Universidad de Medellín por profesores con formación doctoral. Esta evaluación se desarrollo mediante un formulario de Google que nos permitió sintetizar la información en una hoja de cálculo, además, las estudiantes adjuntaron su hoja de respuesta como parte del proceso investigativo.

## Tipos de tareas del cuestionario

Las preguntas del cuestionario se dividieron en dos contextos: matemático [M] e hipotético [H]. En el primero aparece de manera explícita la operación a realizar, por ejemplo, dar la respuesta de la operación, en el segundo, se presenta una situación problema en la que el estudiante debe decidir qué operación permite resolver la tarea, aquí es estudiante debe extraer los datos ya que si bien pueden presentarse de manera explícita el estudiante debe usar su razonamiento para resolver la tarea. En la tabla 1 se enuncian cada uno de ellos:

Tabla 1. Contextos de las preguntas del cuestionario

Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Contexto	M	M	M	H	M	M	M	M	M	H	H	H	H	M	M	M

## Análisis de los datos

El análisis de los datos se realizó en tres fases. En la primera fase se identificaron las respuestas correctas e incorrectas por cada ítem del cuestionario (tabla 2) y se ponderó el porcentaje de estas respuestas por cada grupo de edad (tabla 3). En la segunda fase

se identificaron los errores cometidos en los protocolos de respuesta, lo cual permitió depurar la información. En la tercera fase se identificaron tres tipos de errores que se constituyeron en las unidades de análisis lo cual se cruzó con la herramienta analítica propuesta por Radatz (1979) para caracterizarlos.

Tabla 2. Distribución de respuestas al cuestionario

No. Pregunta	Correcta		Incorrecta	
	Absoluta	Porcentual	Absoluta	Porcentual
1	116	59%	79	41%
2	153	78%	42	22%
3	158	81%	37	19%
4	147	75%	48	25%
5	104	53%	91	47%
6	94	48%	101	52%
7	90	46%	105	54%
8	92	47%	103	53%
9	126	65%	69	35%
10	171	88%	24	12%
11	81	42%	114	58%
12	144	74%	51	26%
13	92	47%	103	53%
14	73	37%	122	63%
15	90	46%	105	54%
16	130	67%	65	33%

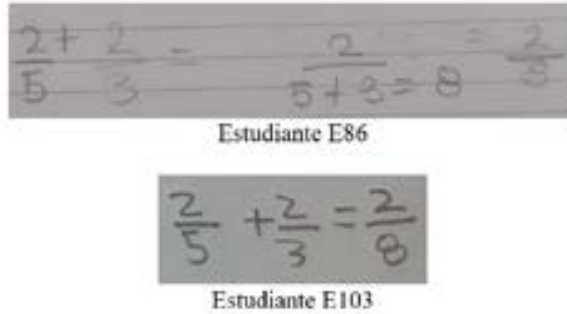
Tabla 3. Ponderación de respuestas por grupo de edad

Edad	Correctas		Incorrectas		No. de estudiantes
	Media	Porcentual	Media	Porcentual	
11	9	58.5%	7	41.5%	25
12	10	61.4%	6	38.6%	148
13	8	52.5%	8	52.5%	18
14	9	53.1%	7	46.9%	2
16	3	18.7%	13	81.3%	2
Total	10	59.6%	6	40.4%	195

## Resultados

Para este análisis, el cual corresponde a la fase dos de este estudio, se revisaron los protocolos de trabajo realizado por las estudiantes, se muestran los errores observados en las estudiantes al resolver las tareas propuestas.

Un error cometido por las estudiantes radica en que cuando se realiza una operación aditiva con fracciones homogéneas, se suman o restan los numeradores según el caso, al ver que los numeradores son iguales, asumen que lo que se deben sumar son los denominadores (figura 1).



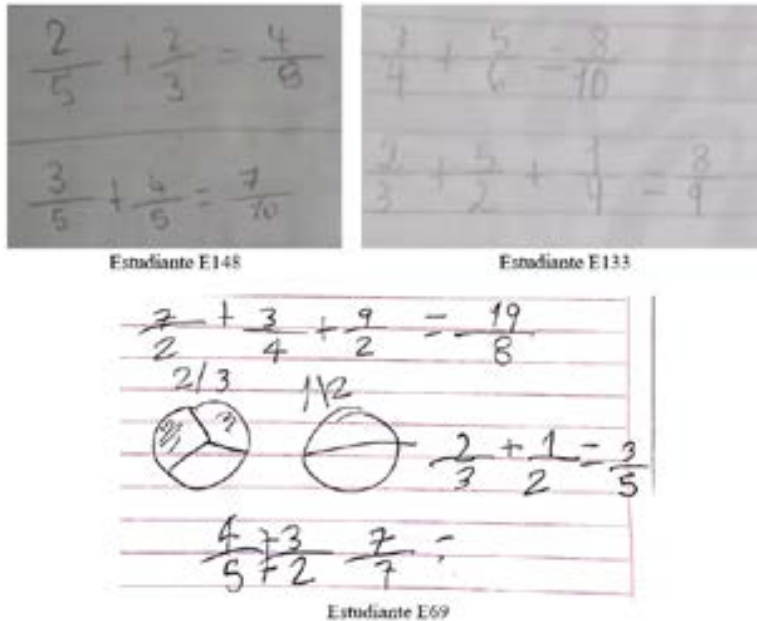
Estudiante E86

Estudiante E103

Figura 1. Ejemplos de respuestas de las estudiantes

Otro error identificado en las estudiantes es concebir la fracción como dos números enteros independientes separados por una barra. Es decir, las estudiantes no distinguen diferencias entre un número entero y un racional, se operan de manera independiente cada uno de ellos

(numerador y denominador) y se ofrece un resultado. En este caso se realizaron sumas o restas de los numeradores y denominadores aun cuando el problema se presentó de manera pictórica (figura 2).



Estudiante E148

Estudiante E133

Estudiante E69

Figura 2. Ejemplos de respuestas de las estudiantes

Se detectó la aplicación mecánica de algoritmos para resolver operaciones aditivas sin una interpretación de la respuesta. En este caso, la estudiante no se da cuenta del significado de las fracciones que está sumando y no ofrece una fracción irreducible, esto denota la falta de comprensión sobre las operaciones que realiza (figura 3).



Estudiante F167

Estudiante I109

Figura 3. Ejemplos de respuestas de las estudiantes

Para caracterizar los errores de las estudiantes, se organizaron en la tabla 4, en la que se sintetizan y se relacionan con el trabajo de Radatz.

Tabla 4. Caracterización de los errores

Error	Explicación	Tipo de error
	Se asume que la adición debe hacerse con los denominadores porque los numeradores son iguales, esto sucede porque en el caso de las fracciones homogéneas, el denominador indica el nombre de la fracción y lo que se suman son partes iguales de la esta. La creencia se sustenta en el hecho de que se puede transferir ese conocimiento a este tipo de situaciones.	Error por asociación
	Este error se relaciona con el trabajo previo desarrollado con los números enteros, se considera que la fracción se compone de dos números enteros y no se ve como un todo, es decir, no se distingue la fracción como un solo número. Esto también se explica desde la riqueza conceptual inherente a las fracciones.	Error por aplicación
	El error <i>conceptual</i> consiste en no identificar que las fracciones homogéneas no requieren la aplicación de este algoritmo, esto deja ver que su aplicación se hace de manera mecánica y que no se ha interiorizado el concepto de fracción.	Error por saberes previos

## Discusión

Coincidimos con el planteamiento de Lee *et al.* (2016) quienes señalan que las interpretaciones de las fracciones son guiadas por la alineación semántica entre las matemáticas y la vida real. Esto sugiere que la forma como los estudiantes se relacionan con las fracciones condiciona su entendimiento sobre ellas. Si bien estos autores ofrecen una definición de fracción como la relación entre los cardinales de dos conjuntos, los cuales se expresan con números enteros, este acercamiento es limitado dado que favorece en los estudiantes sólo un tipo de significado, y tal como lo muestran los datos de este estudio, se realizan operaciones aisladas entre numeradores y denominadores.

Al igual que Şiap y Duru (2004) se detectó que las estudiantes conciben el numerador y denominador de la fracción como dos enteros, y esto, según los resultados de este estudio, acarrea problemas al momento de hacer sumas y restas. Además, tal como lo sugiere Butto-Zarzar (2013), la representación  $a/b$  junto con la concepción de parte-todo restringe su significado e implícitamente sugiere pensar en dos acciones tomar/dividir lo que, a su vez, es un obstáculo para comprender las fracciones impropias y crea una dependencia hacia objetos concretos donde el estudiante pueda visualizarlo.

Tal como lo explicita Lortie-Forgues *et al.* (2015) hay dos causas principales que explican los errores de los estudiantes al resolver operaciones con fracciones, la primera debida a la naturaleza misma del concepto y la segunda está influenciada con los procesos de enseñanza y aprendizaje, aunque advertimos que este estudio no tuvo el propósito de identificar cuestiones relativas a la enseñanza. Sin embargo, se observó que la semántica de los problemas y las dificultades para transformar expresiones simbólicas a expresiones verbales produce una respuesta inadecuada (Kar, 2015), que se refuerza con los conocimientos

conceptuales y aplicación de algoritmos (Hui-Chuan, 2014).

## Conclusiones

De acuerdo con los resultados que arroja el cuestionario, las estudiantes de 12 años que participaron en este estudio exploratorio, obtuvieron un mejor desempeño comparado con el resto de las participantes y, contrario a lo que se esperaría, a medida que aumenta la edad hay una disminución en el desempeño. Algunos de los errores que comenten las estudiantes se asocian a procesos algorítmicos usados en la resolución de problemas en este conjunto numérico y sirven como evidencia de la falta de comprensión del concepto de fracción y de sus operaciones asociadas.

Los contextos de las preguntas del cuestionario muestran que, tanto en las situaciones hipotéticas como matemáticas, las estudiantes presentan dificultades, esto significa que el abordaje de este objeto de matemático debe contemplar a la par situaciones hipotéticas y matemáticas (ver tabla 2). Por otro lado, la caracterización que se logra en este estudio ofrece elementos para el diseño de situaciones de aprendizaje que ayuden a las estudiantes a superar las dificultades relacionadas con los errores identificados, estas tareas deben apuntar a disminuir el uso mecánico de algoritmos para que aborden la solución de las tareas con más herramientas conceptuales que les permitan actuar de manera eficiente en cada uno de los interrogantes que se les plantea.

Las concepciones sobre operaciones aditivas identificadas en las estudiantes muestran que las fracciones son concebidas como dos números enteros y, por ende, las acciones se realizan sobre los numeradores y denominadores de manera independiente (ver figura 2) lo cual se caracterizó como un error por aplicación (ver tabla 4); esto es consecuencia de uno de sus significados, en particular, el de razón, donde

lo que se hace es comparar dos cantidades, es necesario diseñar tareas que promuevan otros significados como el de operador, parte todo, cociente y medida.

### Referencias bibliográficas

- Ausubel, D. P., Novak, J. D., & Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo (Vol. 2)*. Trillas.
- Batanero, C., Godino, J. D., Vallecillos, A., Green, D. R., & Holmes, P. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 25(4), 527–547. <https://doi.org/10.1080/0020739940250406>
- Bassey, M. (1999). *Case Study Research in Educational Settings*. Open University Press.
- Bouck, E. C., Park, J., Cwiakala, K., & Whorley, A. (2020). Learning Fraction Concepts Through the Virtual-Abstract Instructional Sequence. *Journal of Behavioral Education*, 29, 519–542. <https://doi.org/10.1007/s10864-019-09334-9>
- Brijlall, D. (2014) Exploring Practical Work as a Sustainable Strategy in Rural Mathematics Classrooms: A Case of Addition of Fractions. *International Journal of Educational Sciences*, 7(3), 481–490. <https://doi.org/10.1080/09751122.2014.11890209>
- Buform, Á., Llinares, S., & Fernández, C. (2018). Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 23(76), 229–251. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=14054854010>
- Butto-Zarzar, C. (1). El aprendizaje de fracciones en educación primaria: una propuesta de enseñanza en dos ambientes. *Horizontes Pedagógicos*, 15(1), 33–45. <https://horizontespedagogicos.iberoco/article/view/403>
- Fernández, C., & Llinares, S. (2010). Relaciones entre el pensamiento aditivo y multiplicativo en estudiantes de educación primaria. El caso de la construcción de la idea de razón, *Horizontes Educativos*, 15(1), 11–22. <https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/16589/6/Horizontes2010fernandez-llinares.pdf>
- Fernández-Ruiz, J., & Panadero, E. (2020). Comparison between conceptions and assessment practices among secondary education teachers: more differences than similarities, *Journal for the Study of Education and Development*, 43(2), 309–346. <https://doi.org/10.1080/02103702.2020.1722414>
- Goodenough, W. H. (1990). Evolution of the human capacity for beliefs. *American Anthropologist*, 92(3), 597–612. <https://doi.org/10.1525/aa.1990.92.3.02a00030>
- Hansen, N., Jordan, N. C., & Rodrigues, J. (2017). Identifying learning difficulties with fractions: A longitudinal study of student growth from third through sixth grade. *Contemporary Educational Psychology*, 50, 45–59. <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2015.11.002>
- Harel, G. (2008). What is mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question. In B. Gold & R. Simons (Eds.), *Proof and other dilemmas: Mathematics and philosophy* (pp. 265–290). Mathematical Association of America.

- Heemsoth, T., & Heinze, A. (2014). The impact of incorrect examples on learning fractions: A field experiment with 6th grade students. *Instructional Science*, 42, 639–657. <https://doi.org/10.1007/s11251-013-9302-5>
- Hui-Chuan, L. (2014). A comparative analysis of British and Taiwanese students' conceptual and procedural knowledge of fraction addition. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(7), 968–979. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.892163>
- Kar, T. (2015). Analysis of problems posed by sixth-grade middle school students for the addition of fractions in terms of semantic structures. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 46(6), 879–894. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1021394>
- Kieren, T. E. (1980). The rational number construct—its elements and mechanisms. In T. E. Kieren (Ed.), *Recent research on number learning* (pp. 125–149). ERIC/SMEAC.
- Kieren, T. E. (1992). Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge: Implications for curriculum and instruction. In G. Leinhardt, R. Putnam y R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (pp. 323–371). Lawrence Erlbaum Associates.
- Kiili, K., Moeller, K., & Ninaus, M. (2018). Evaluating the effectiveness of a game-based rational number training - In-game metrics as learning indicators. *Computers and Education*, 120, 13–28. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2018.01.012>
- Lee, H. S., DeWolf, M., Bassok, M., & Holyoak, K. J. (2016). Conceptual and procedural distinctions between fractions and decimals: A cross-national comparison. *Cognition*, 147, 57–69. <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2015.11.005>
- Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review*, 38, 201–221. <https://doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008>
- Martín, E., Mateos, M., Martínez, P., Cervi, J., Pecharromán, A., & Villalón, R. (2006). Las concepciones de los profesores de educación primaria sobre la enseñanza y el aprendizaje. In J. I. Pozo, N. Scheuer, M. P. Pérez, M. Mateos, E. Martín & M. de la Cruz (Eds.), *Nuevas formas de pensar la enseñanza y el aprendizaje* (pp. 171–187). Graó.
- Mendoza, T. (2018). Aprender del problema y de las formas de interacción. La construcción de conocimientos relativos al porcentaje en clases de secundaria. *Revista Colombiana de Educación*, (74), 133–154. <https://doi.org/10.17227/rce.num74-6901>
- Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje: matemáticas*. Panamericana Formas e Impresos S.A.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Paternina, A., & Quessep, D. C. (2017). Creencias y concepciones: una mirada a la evaluación matemática en la educación superior. *Revista Boletín Redipe*, 6(4), 150–159.

- Perera, P. B., & Valdemoros, M. E. (2009). Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado. *Educación Matemática*, 21(1), 29–61. <http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v21n1/v21n1a3.pdf>
- Ponte J. P. (1994). Knowledge, beliefs and conceptions in mathematics teaching and learning. In L. Bazzini (Ed.), *Proceedings of the Fifth international conference on systematic cooperation between theory and practice in mathematics education* (pp. 169–177). ISDAF.
- Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10(3), 163–172. <https://doi.org/10.2307/748804>
- Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematical learning process: a survey. *For the learning of Mathematics*, 1(1), 16–20. <https://www.jstor.org/stable/40247696>
- Ríos-Cuesta, W. (2020). Competencias de argumentación y modelización en estudiantes de secundaria: la necesidad de un cambio de paradigma en la Educación Matemática del Chocó, Colombia. *Pesquisa e Ensino*, 1, 1–21. <https://doi.org/10.37853/pqe.e202020>
- Ríos-Cuesta, W. (2021). Aplicación de las representaciones gráficas y la visualización a la resolución de problemas con fracciones: una transición hacia el algoritmo. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (63), 196–222. <https://www.doi.org/10.35575/rvucn.n63a8>
- Şiap, İ., & Duru, A. (2004). Kesirlerde geometriksel modelleri kullanabilme becerisi. *Gazi Üniversitesi Kastamonu Eğitim Dergisi*, 12(1), 89–96.
- Vygotsky, L. S. (1979). *El desarrollo de los procesos psíquicos superiores*. Grijalbo.