RECIBIDO EL 27 DE OCTUBRE DE 2023 - ACEPTADO EL 28 DE ENERO DE 2024

EL MOVIMIENTO DE PROYECTILES DESDE UN CONTEXTO DE SIGNIFICACIÓN

THE MOVEMENT OF PROJECTILES FROM A CONTEXT OF SIGNIFICANCE

Carlos Andrés Quintana Blanco[1]

cquintanab@ulagrancolombia.edu.co
Universidad La Gran Colombia
Bogotá D.C, Colombia.

Felipe Andrés Díaz León[2]

fdiazl@ulagrancolombia.edu.co
Universidad La Gran Colombia
Bogotá D.C, Colombia.

Carlos Eduardo León Salinas[3]
carlos.leon@ugc.edu.co
Universidad La Gran Colombia
Bogotá D.C, Colombia.

Resumen

El presente artículo se centra en el fenómeno físico sobre el movimiento de proyectiles, específicamente en el experimento desarrollado por Galileo Galilei, uno de los personajes más famosos y controvertidos de la historia. Este experimento tuvo lugar en un contexto marcado por las ideas de Aristóteles, las cuales se aceptaban como verdades absolutas. El análisis se realiza bajo la determinación de un contexto de significación como elemento fundamental de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME). Este factor permitirá identificar elementos presentes en dicho fenómeno, los cuales serán fundamentales en la enseñanza de lo cuadrático en el futuro.

Palabras clave: Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, cuadrático, experimentación, parábola.

Abstract

This article delves into the physical phenomenon of projectile movement, with a particular focus

1 Licenciado en Matemáticas. Especialista en pedagogía y docencia universitaria. Estudiante de la Maestría en Educación de la Universidad La Gran Colombia. https://orcid.org/0009-0006-0256-8777
2 Licenciado en Matemáticas. Especialista en pedagogía y docencia universitaria. Estudiante de la Maestría en Educación de la Universidad La Gran Colombia. https://orcid.org/0009-0006-9771-0202
3 Licenciado en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Especialista en Pedagogía y Docencia Universitaria de la Universidad La Gran Colombia. Magister en didáctica de las matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Candidato a Doctor en Matemática Educativa del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada CICATA. https://orcid.org/0000-0002-5220-1635

on the groundbreaking experiment pioneered by Galileo Galilei, one of the most famous and controversial figures in history. This experiment took place in a context marked by Aristotle's dominant ideas, which were accepted as absolute truths. The analysis is conducted between the framework of identifying a scenario of significance, a fundamental element of the Socioepistemological Theory of Educational Mathematics (TSME). This aspect will enable us to identify the constituent elements of this phenomenon, which will play a crucial role in shaping the future teaching of quadratic concepts.

Keywords

Socioepistemological Theory of Educational Mathematics, quadratic, experimentation, parabola.

Introducción

Según Guaypatin et al. (2021), las matemáticas surgieron debido a la necesidad de resolver problemas, ejecutar acciones cotidianas (generalmente asociadas a la cuantificación), administrar bienes materiales y, por consiguiente, comunicar dichos procesos a los demás grupos sociales. De manera similar, Mora (2003) señala que las matemáticas se han convertido en parte fundamental de la formación integral de las personas desde temprana edad, en donde no solamente bastan los conocimientos adquiridos en la escuela, sino que también cobran importancia las experiencias y enseñanzas que se obtienen en el entorno.

Al entender que los conceptos matemáticos que se imparten en la actualidad son el producto de la experiencia e interacción con el entorno a lo largo de la historia, una de las dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje, según Tapia y Murillo (2020), es la falta de comprensión de los procesos y elementos matemáticos en la resolución de un problema, llegando a la desmotivación y rechazo a las matemáticas. Además, la escasa interacción entre el estudiante y el fenómeno físico que se desea comprender conduce a la pérdida de interés por el aprendizaje y la apropiación del tema (Amaguaya y Castro, 2022).

A lo largo de la historia, varios personajes han establecido fundamentos matemáticos mediante el análisis de la relación entre el sujeto y los fenómenos físicos, como la construcción de lo cuadrático, inspirados en eventos culturales e históricos particularmente en Europa, como el movimiento de proyectiles. Bell (2016) señala que comprender la historia de la matemática es crucial para entender la evolución de los conceptos matemáticos y facilita la identificación de estrategias didácticas efectivas para su enseñanza.

En línea con lo anterior, durante la construcción de nociones asociadas a la cuadrático, surgió uno de los personajes más importantes, controvertidos y famosos en el campo científico, como lo fue Galileo Galilei, matemático, físico y astrónomo italiano. Se relaciona con la revolución científica, especialmente entre los siglos XVI y XVII, en donde particularmente las ideas de Nicolás Copérnico y Aristóteles eran el centro de atención y discusión entre las grandes mentes. En ese sentido, Koyré (1966) afirmó lo siguiente: "El hombre moderno busca el dominio de la naturaleza, en tanto que el medieval, o el antiguo, perseguía únicamente su contemplación" (p.2).

El documento examina el experimento innovador de Galileo Galilei, que desafió las convenciones tradicionales del análisis matemático de fenómenos físicos mediante la experimentación. Se aborda desde una perspectiva socioepistemológica, dentro del marco de la TSME, con el fin de diseñar a futuro, estrategias educativas, especialmente en matemáticas, utilizando el contexto histórico del movimiento de proyectiles para comprender conceptos asociados a lo cuadrático.

Factores sociales, curriculares e históricos en la enseñanza de lo cuadrático

De acuerdo con Pineda y Robles (2011), a lo largo de la historia, ha existido la necesidad de dotar de significado a los conceptos matemáticos asociados a experimentos físicos, los cuales han representado oportunidades para progresar en los ámbitos científicos y tecnológicos. En cada periodo de la historia, estos desafíos han planteado diversos problemas para los estudiosos de las matemáticas. Rodríguez (2011) subrayó la importancia de integrar en el entorno educativo los conocimientos matemáticos relacionados con diferentes ciencias, que en su mayoría suelen abordarse de manera aislada, sin destacar su aplicabilidad en un contexto particular.

Para abordar las dificultades previamente expuestas en el aprendizaje de las matemáticas, De la Cruz y Hernández (2018) apuntaron que los objetos matemáticos tienden a evolucionar de manera lineal, en gran medida influenciados por la experiencia humana, lo que resulta en la pérdida de su conexión con el contexto real. Para otorgar significado a los conceptos matemáticos en el entorno educativo, García y Moreno (2019) sugirieron que la experimentación posibilita una aproximación al conocimiento científico en un contexto específico, permitiendo construir explicaciones sobre fenómenos naturales y proporcionando a los estudiantes una mejor comprensión de los conceptos y soluciones mediante la coherencia establecida entre los diversos aspectos que configuran un fenómeno natural.

De acuerdo con lo anterior, uno de los conceptos dentro del contexto escolar, es la *función cuadrática*, entendida como un elemento y tema fundamental en el currículo de la enseñanza básica y media. Además, es el referente para enmarcar todo lo relacionado con el comportamiento de lo cuadrático. Según Vargas (2011), como se citó en Espinoza (2020), una de las tareas pendientes en el estudio y aprendizaje de la función cuadrática es el diseño de actividades didácticas ligadas a fenómenos de la vida cotidiana, en donde el estudiante pueda modelar dichas situaciones por medio de este concepto. Es por esta razón que existe la necesidad de relacionar los fenómenos físicos con herramientas didácticas que garanticen una apropiación eficaz del objeto de estudio mencionado.

Por su parte, Castillo y Peña (2019) mencionan que, dentro de las ciencias, la función cuadrática tiene muchas aplicaciones, puesto que, asociada al concepto de *parábola* o *ecuaciones cuadráticas*, puede resolver problemas relacionados con la descripción del movimiento de proyectiles, crecimiento poblacional, cursos avanzados en carreras de ingeniería, entre otros. Sin embargo, una de las dificultades al momento de abordar el concepto de *función cuadrática*, según Arredondo y Mendoza (2019), es que en ocasiones no se logra una transición eficaz entre el lenguaje natural y el matemático, creando vacíos conceptuales entre la relación de puntos representativos de las parábolas con sus expresiones algebraicas.

En este contexto, Kieran (1989) señaló que estas dificultades se relacionan con la enseñanza del concepto de *función*, específicamente en el estudio de los elementos matemáticos que involucran expresiones simbólicas, verbales, gráficas y la dependencia entre variables. De este modo, Borges (2010), como se citó en Tocto et al. (2023), manifestó que los estudiantes no logran establecer las relaciones entre diferentes tipos de representación de una función: verbal, gráfica, algebraica, entre otras. Dicha problemática también se extiende a la formación docente, donde existen dificultades al momento de relacionar diferentes contextos asociados a un concepto matemático, particularmente las funciones representadas de forma algebraica y gráfica (Tocto et al., 2023).

En concordancia con Villa y Ruiz (2009) y Villarraga (2012), como se citó en Ortiz et al. 2020):

> La representación gráfica de la función cuadrática se limita a determinar el vértice y el eje de simetría, luego tomar algunos valores enteros a izquierda y derecha para construir una tabla de valores, con el único objetivo de formar parejas ordenadas que se ubican en el plano cartesiano y unir estos puntos y representar dicha función. (p. 22)

En su investigación, Arias y Burgos (2020) concluyeron que los estudiantes enfrentan dificultades al resolver problemas contextualizados que involucran la función cuadrática. Esto se debe a su preferencia por procesos mecánicos, como la sustitución de valores, la organización de datos y el uso de fórmulas, que carecen de significado en el contexto. De manera similar, Córdoba (2021) resaltó las deficiencias de los estudiantes en diversas formas de representar una función (algebraica, gráfica, numérica y verbalmente). La falta de comprensión de la función cuadrática se debe a la debilidad en conceptos previos esenciales, como el lenguaje algebraico, ecuaciones lineales, función afín y función lineal.

Contextualizar un problema o concepto matemático como lo relacionado con lo cuadrático, dentro en un fenómeno físico permite entender su génesis y razón de ser en un contexto específico. De esta manera, se adopta otro elemento y quizás el más importante, como lo es la historia. Para Mesa (2008), la historia es una herramienta importante en el ámbito educativo, puesto que le ofrece al educador una oportunidad de reflexionar frente al diseño de actividades en el aprendizaje de las matemáticas.

En esta propuesta de investigación, se busca reflexionar sobre elementos particulares, con el fin de contrarrestar los problemas asociados al aprendizaje de lo cuadrático, mejorando a la vez la comprensión sobre ellos. Desde este punto de vista, Nolla (2001) afirmó lo siguiente:

> Los conceptos y las ideas matemáticas que se tratan en la Enseñanza Secundaria son presentados a los alumnos de una forma cerrada y acabada. Se olvida que han surgido después de un largo proceso de gestación, en las que las intuiciones más fecundas con otras estériles han configurado sus presentaciones sucesivas. A lo largo de la Historia, estas ideas han sido generadas por diversos tipos de problemas, prácticos o teóricos, pertenecientes a la propia matemática o a otras disciplinas. El conocimiento de estos problemas, y el estudio de la evolución de su tratamiento y de los nuevos problemas que han generado, proporciona los fundamentos para la comprensión de las ideas y conceptos que de ellos han resultado. (p. 1)

Para Dorce (2019), la historia de las matemáticas proporciona el contexto adecuado para entender la evolución de los conceptos impartidos en el aula de clase desde la comprensión del contexto cultural, social e histórico. El autor destaca que, en ese momento, estos conceptos surgieron gracias a la actividad humana, fruto de la preocupación de algunos hombres.

Esta propuesta de investigación surgió de la necesidad de otorgarles aplicaciones prácticas a conceptos abstractos en un entorno educativo en constante cambio debido a la globalización y avances tecnológicos. Se aborda la conexión entre las matemáticas y otras disciplinas, especialmente la física, a través de un análisis contextual del movimiento de proyectiles propuesto por Galileo como elemento fundamental en la concepción de lo cuadrático. Este análisis está dirigido por la determinación de un contexto de significación, enmarcado dentro de la perspectiva de la TSME, y conlleva a plantear la siguiente pregunta:

Pregunta de investigación

¿Qué elementos dentro de un contexto de significación posibilitaron la concepción de lo cuadrático a partir del movimiento de proyectiles propuesto por Galileo Galilei?

Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: contexto de significación

Al involucrar en este estudio los aspectos históricos, sociales y curriculares, la teoría bajo la cual se guía esta investigación es la TSME, que presenta una propuesta integral sobre el aprendizaje y la formación humana en matemáticas, en donde se relaciona la teoría con la actividad humana asociada a una cultura y un contexto específico (Torrellas y Romano, 2009). En palabras de Cantoral et al. (2014): "la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) se ocupa específicamente del problema que plantea la *construcción social del conocimiento matemático* y el de su *difusión institucional*" (p. 93).

Dentro de la TSME, Cantoral (2013) señaló que los significados construidos a partir de la acción del individuo sobre el objeto están íntimamente relacionados con el contexto en el que la acción tiene lugar. De esta manera, el objeto se moldea significativamente por el uso de símbolos en dicha interacción. Del mismo modo, Cantoral et al. (2014) destacaron que en la Socioepistemología se incorporan los contextos culturales y sociales como principales factores en la construcción social del conocimiento orientado por prácticas de referencia y normados por prácticas sociales.

Según López y Montiel (2022), el contexto de significación se refiere al conocimiento y está vinculado con las circunstancias sociales y culturales específicas de una época y una región. Además, incluye las prácticas o actividades particulares de un grupo de individuos en escenarios que pueden ser populares, cultos o étnicos. El análisis del fenómeno se desarrolla a partir del análisis del contexto cultural, contexto situacional y contexto de la situación específica.

El contexto cultural comprende las características sociales que determinan grupos culturales específicos "que manifiestan necesidades de tipo ideológico, psicológico, fisiológico o ambiental de los individuos" (Crespo, 2007, p. 37). También incluye "aquellas creencias y concepciones que son la base de su racionalidad" (Espinoza, 2009, p. 28). El contexto situacional corresponde al conjunto de factores o circunstancias espaciotemporales que delimitan la realidad cercana de los sujetos relacionados con el saber objeto de estudio (López y Montiel, 2022). Finalmente, el contexto de la situación específica hace referencia a la actividad matemática específica (popular, técnica o culta) que determina problemas y/o situaciones dentro de las cuales el saber emerge (López y Montiel, 2022).

Metodología

Esta investigación es de tipo documental con un enfoque histórico, centrada en el análisis de un contexto de significación dentro de la TSME relacionado con la construcción de lo cuadrático a partir del movimiento de proyectiles propuesto por Galileo Galilei. Se utilizaron algunas obras de carácter histórico que describen el movimiento de proyectiles, así como textos que abordan el contexto sociocultural de la época de Galileo.

Se realizó una clasificación de algunas fuentes para el contexto de significación, siguiendo los criterios establecidos por Wardhaugh (2010) (ver Tabla 1).

Tabla 1. Algunas fuentes consultadas para la determinación del contexto de significación

Tipo de fuente	**Fuentes**
Primaria	*Dialogo di Galileo* de Galilei Linceo (1632).
Secundaria	*Diálogo sobre dos nuevas ciencias* de Hawking (2010).
	La teoría de Galileo sobre el movimiento de proyectiles de Naylor (1980).
	El método científico: Galileo. La naturaleza se escribe con fórmulas de Corcho (2012).
	La vida de Galileo Galilei de Banfi (1967).
	La obra de Galileo y la conformación del experimento en la física de Álvarez y Posadas (2002).
	Estudios Galileanos de Koyré (1966).
Terciaria	*La revolución de Galileo y la transformación de la ciencia* de Renn (2009).
	El movimiento de proyectiles en la mecánica de Diego Hurtado de Mendoza y la nueva dinámica renacentista de Echeverría (2011).

Nota. Elaboración propia, adaptado de *How to read historical mathematics*, por B. Wardhaugh, 2010, Princeton University Press.

Resultados

A partir de la revisión documental de las fuentes mencionadas, entre otras, se llevó a cabo el análisis del movimiento de proyectiles desde el contexto de significación de la TSME, enfocándose en aquellos aspectos históricos, sociales, culturales y especialmente matemáticos que condujeron a Galileo a establecer relaciones cuadráticas en dicho fenómeno.

Contexto de significación: contexto cultural

En su estudio, Manzo (2021) caracterizó a la revolución científica como una etapa de cambio notable en el pensamiento científico y la experimentación, ocurrida aproximadamente entre los siglos XVI y XVIII en Europa. Este periodo se destacó por avances revolucionarios en disciplinas como la astronomía, la física, la biología y la química, generando una transformación radical en la comprensión del mundo natural. Koyré (1966) dividió esta época en periodos: la física Aristotélica, la física del "ímpetu" propuesta por Nicolas de Oresme y la escuela de Buridan, y finalmente la física matemática o experimental caracterizada por los trabajos de Arquímedes y Galileo.

La enseñanza en instituciones europeas, especialmente en Italia en los siglos XVI y XVII, estaba influenciada por las enseñanzas de Aristóteles en los campos de la medicina, la filosofía, las matemáticas y la **física.** Banfi (1967) manifestó que la física y la medicina aristotélica eran teóricas y dejaban de lado lo práctico, asociadas a la necesidad de relacionar la fe con la razón en la Escolástica. La experimentación se aceptaba de manera parcial, y la visión cosmológica sostenía que la Tierra era el centro del universo, adoptada por la Iglesia durante mucho tiempo.

En cuanto al movimiento, Duarte (2011) señaló que Aristóteles sostenía que los cuerpos pesados caían más rápido que los livianos debido a que un cuerpo más pesado, como la Tierra, buscaba estar en el centro del universo. A diferencia de Galileo, quien separó el movimiento de la naturaleza de los objetos, Aristóteles buscaba explicar las causas del movimiento mediante la filosofía en lugar de describirlas e interpretarlas.

En este mismo sentido, Bombal (2014) indicó que, según Aristóteles, el Universo es finito y eterno, compuesto por el mundo sublunar (tierra, aire, fuego y agua) y el supralunar (cuerpos celestes e incorruptibilidad). La solidez de las esferas celestes y la incorruptibilidad de los cielos se cuestionaron cuando astrónomos como Tycho Brahe, Kepler y Galileo observaron fenómenos como la aparición de estrellas o el paso de cometas, marcando una nueva visión del mundo físico y la necesidad de observación y experimentación para respaldar las teorías.

Aunque algunos aspectos de la física aristotélica son erróneos, fue ampliamente adoptada en su época por su coherencia lógica basada en observaciones comunes. La fusión entre la teología cristiana y la filosofía aristotélica, establecida por Santo Tomás de Aquino, proporcionó una cosmovisión completa (Koyré, 1966). De acuerdo con Hemleben (1967), Copérnico publicó en 1543 un tratado técnico de astronomía y matemáticas, proponiendo el heliocentrismo. Aunque no tuvo eco entre los círculos más influyentes de la época, algunos procedimientos técnicos utilizados por Copérnico se destacaron. Galileo defendió la teoría heliocéntrica de Copérnico en sus publicaciones y trabajos científicos, siendo cauteloso para evitar conflictos con la Iglesia debido a su poder en la sociedad.

Según Jiménez (2016), 1543 marcó el inicio del heliocentrismo con la publicación del libro *De Revolutionibus Orbium Caelestium* de Nicolás Copérnico. Esto generó controversias en los principales centros universitarios, que estaban dominados por las enseñanzas aristotélicas y los modelos ptolemaicos, provocando confrontaciones entre principios filosóficos tradicionales y la nueva astronomía. Durante el siglo XIV, la escuela parisina de Buridán y Nicolás de Oresme desarrollaron la física del "**ímpetu**" como una alternativa a la teoría aristotélica. Buridán propuso que un agente transfiere al móvil una fuerza motriz o ímpetus que lo impulsa hasta que la resistencia del medio la agota (Bombal, 2014).

Rivera et al. (2019) indicaron que Galileo definió el concepto por medio del "momento" y Descartes por medio de la "cantidad de movimiento". Como mencionó Koyré (1966), para los aristotélicos, la solución al movimiento se centraba en la disminución de la resistencia del aire para alcanzar el estado natural de cada cuerpo. En cambio, para aquellos que respaldaban la física del ímpetu, se enfocaba en la variación de la fuerza motriz, es decir, el ímpetu del cuerpo. Esta teoría buscaba explicar la fuerza motriz que mantenía a un cuerpo en movimiento, dependiendo de propiedades como la masa, forma y tamaño. Aunque fue un avance importante en el pensamiento científico durante la Edad Media y el Renacimiento, gradualmente fue reemplazada por la nueva ciencia.

Galileo es ampliamente aceptado como el fundador de dos disciplinas físicas fundamentales: la mecánica del movimiento y la resistencia de materiales. Además, se le considera el padre de la ciencia moderna (Altshuler, 2002). Ostilio Ricci, discípulo de Tartaglia, desempeñó un papel crucial en la influencia de Galileo al presentarle las obras y estudios de Euclides y Arquímedes. Galileo, motivado por Ricci, abandonó sus estudios de medicina y adoptó un enfoque científico que marcó su estilo (Stranthern, 2015).

Aristóteles, una figura importante en la filosofía y la física, destacó en el siglo XVI con su obra *La Mecánica*. Iommi (2011) afirmó que Aristóteles abordó problemas de balística, centrándose en explicar el fin del ascenso de objetos lanzados, considerando razones como la fuerza, el peso y la resistencia. Sin embargo, Aristóteles no logró describirlas detalladamente y se centró en analizar la causa del movimiento y la relación entre el tamaño del objeto y la distancia alcanzada.

Dou (1999) explicó la distinción de Aristóteles entre el movimiento natural y violento de los proyectiles, atribuyendo el primero a la esencia del objeto y el segundo a una fuerza externa constante. Aristóteles rechazó la idea de un motor interno en los proyectiles, argumentando que su movimiento seguía una línea recta debido a una fuerza externa, cayendo eventualmente en línea recta hacia su estado natural. En contraposición, Galileo desafió esta noción al demostrar que los proyectiles siguen una trayectoria curva, ofreciendo así una explicación alternativa y precisa del movimiento de los proyectiles (Puerta, 2009).

Niccolò Fontana, conocido como “Tartaglia”, fue un matemático renombrado en el Renacimiento. En 1546, publicó *Quesiti et inventione diverse*, oponiéndose a los principios de Aristóteles. A través de su discípulo Diego Hurtado de Mendoza, Tartaglia contribuyó a la estática, dinámica y estrategia militar. Destacó por sus trabajos en el movimiento de proyectiles, analizando el problema del ángulo para obtener el mayor alcance al disparar un cañón (Corcho, 2012). En su obra *Nuova scienza* (1537), Tartaglia describió el movimiento del proyectil como compuesto por una línea recta (fuerza impresa), un arco de circunferencia (fuerza de la gravedad) y una línea vertical (caída libre del cuerpo).

Contexto situacional

Al entender el contexto de significación como elemento fundamental en la construcción humana del conocimiento, es importante señalar aspectos históricos que dan origen al interés por el estudio de este fenómeno y el papel del ser humano en relación con dicho contexto. Resulta conveniente señalar que Galileo no fue el único que se interesó por este fenómeno, y tal como lo manifestó Corcho (2012), Tartaglia se caracterizó por sus trabajos en el movimiento de proyectiles, analizando el problema de ajustar el ángulo con el que se debe disparar un cañón para obtener el mayor alcance.

Posteriormente, en el año 1600, el marqués Guidobaldo del Monte le sugirió a Galileo un experimento sobre la caída de los graves (cuerpos pesados) al rodar sobre un plano inclinado (Álvarez y Posadas, 2003). Esto parece indicar que, en estos años, Galileo comenzó a trabajar con este fenómeno intentado describir tres aspectos fundamentales, obteniendo resultados que serían importantes en la publicación de sus obras:

> La forma geométrica de la trayectoria de un cuerpo que cae después de recorrer un plano inclinado, la proporción entre los tiempos y los espacios para un cuerpo que se mueve sobre el mismo y la conservación del movimiento horizontal del cuerpo después de abandonar dicho plano. (Álvarez y Posadas, 2003, p. 1)

Según Strathern (2015), la introducción de la pólvora incrementó el interés en el estudio de los proyectiles, ya que la artillería pasó de ser una acción rudimentaria a una práctica más refinada que predice la trayectoria de los proyectiles. Según este mismo autor, el hermano de Guidobaldo, general del ejército veneciano, sugirió a Galileo diseñar un instrumento para ajustar las distancias y el ángulo de elevación de los cañones, lo que condujo a la creación del compás geométrico militar, otorgándoles una ventaja en el campo de batalla.

En este mismo sentido, Puerta (2009) señaló que, en sus primeros años en Padua, que hacía parte de la República de Venecia en el siglo XVI, Galileo se dedicó a experimentar en su taller y a relacionarse con personal del arsenal, específicamente estudiando trayectorias que describían los proyectiles de artillería. En Padua, su mayor interés se encontraba en la mecánica, realizando importantes descubrimientos, tanto experimentales como teóricos, en asuntos como la aceleración de un cuerpo, la trayectoria parabólica de un proyectil y la resistencia a la fractura de los sólidos (Quiñones, 2012).

Los autores anteriores coinciden en que Galileo siguió de cerca los experimentos e investigaciones con el arsenal veneciano. Además, López (1989) afirmó que una vez que Galileo resolvió los problemas del movimiento uniforme y la caída libre, se dedicó al estudio de los proyectiles, como las balas de cañón en el aire y los chorros de agua de las fuentes. A continuación, se describe la utilidad del compás geométrico militar para mejorar las prácticas en la artillería veneciana:

> Para calcular la trayectoria de un proyectil, se colocaba una de las reglas dentro del cañón del arma. Entonces el oficial artillero alineaba las reglas y leía el alcance del proyectil. Esto se podía hacer desde un lado del cañón en vez de delante de él, refinamiento de la técnica que habría de salvar muchas vidas de oficiales artilleros en esta era de cañones (y operarios) más bien impredecibles. (Strathern, 2015, p. 46)

Galileo logró matematizar el movimiento de los proyectiles basándose en cálculos muy parecidos a los que aportaban los artilleros militares por medio de la observación y experiencia en el campo de batalla (López, 1989). La principal contribución de Galileo a la ciencia y la modernidad se encuentra en su enfoque metodológico, que integró de manera magistral las matemáticas y la experimentación. Este método implica formular una hipótesis sobre la regularidad matemática en un conjunto de fenómenos, realizar un experimento sistemático para probarla, recopilar datos y luego organizarlos para verificar o refutar la hipótesis con base en los resultados.

A continuación, se analizan los elementos de la historia en el experimento de este personaje, que posteriormente sentó las bases para entender el comportamiento de lo cuadrático en fenómenos físicos que se estudian en la actualidad.

Contexto de la situación específica

En primer lugar, se define el movimiento de proyectiles en palabras de Galileo. En la cuarta jornada de la obra *Diálogo sobre dos nuevas ciencias*, el movimiento de proyectiles se define de la siguiente manera:

> En lo que ahora comienzo a tratar, intentaré presentar y establecer, apoyándome en demostraciones rigurosas, algunos fenómenos interesantes y dignos de conocerse y que son propios de un móvil cuando se mueve con un movimiento compuesto de otros dos, es decir un movimiento uniforme y otro naturalmente acelerado: tal parece ser, precisamente, eso es lo que llamamos movimiento de los proyectiles. (Hawking, 2010)

En relación con el tema central de este artículo, que percibir y analizar elementos que conduzcan a la concepción de lo cuadrático a través de la relación entre la distancia recorrida por un móvil en una determinada unidad de tiempo, Galileo planteó en la proposición I: “Un proyectil que se desliza con un movimiento compuesto por un movimiento horizontal y uniforme y por un movimiento descendente, naturalmente acelerado, describe, con dicho movimiento, una línea semiparabólica" (Hawking, 2010, p. 518).

Ahora bien, el asunto se reduce a determinar si la curva marcada por el movimiento del proyectil es parabólica o no. En la complejidad de dicho fenómeno, Naylor (1980) describió detalladamente el proceso llevado a cabo por Galileo para describir la trayectoria del proyectil, en la cual tenía ciertas diferencias con Guidobaldo al discernir si la curva marcada era catenaria o parabólica, dado que este es el camino que se debe seguir para demostrar que el comportamiento del movimiento de la esfera es cuadrático. Este autor continúa de la misma manera que Galileo con el fin de reconstruir el experimento y entender mejor el fenómeno.

Al igual que las investigaciones anteriores de Galileo, se utilizaba un plano acanalado inclinado, en este caso, uno que se curvaba en su extremo inferior. Se soltó una pequeña esfera de metal de aproximadamente un centímetro de diámetro en A para que bajara por una ranura de madera lisa y recta hasta B, donde la ranura se curvaba suavemente para volverse horizontalmente en C. La esfera, por lo tanto, salía de la ranura en C viajando horizontalmente y completaba su trayectoria en N, donde chocaba con una tabla horizontal (Naylor, 1980).

Para Naylor (1980), Galileo trazaba puntos representativos de una parábola y los comparaba con los puntos que marcaba la trayectoria de la esfera, según el anterior procedimiento. En la Figura 1 se establece el modelo que siguió este personaje basado en Galileo y, además, se combina con el planteamiento que realizó este último en su obra *Diálogos sobre dos nuevas ciencias*. Asimismo, como sostuvieron Álvarez y Posadas (2002), Galileo mantuvo la idea de que el plano no debe estar muy inclinado, así como también la bola debe ser perfectamente esférica para lograr datos cada vez más precisos, obteniendo un error experimental muy pequeño.

Para entender de una mejor manera, inicialmente Galileo analizó las dos magnitudes que involucran al movimiento: tiempo y distancia. En primer lugar, analizó el tiempo que tardaba la esfera en recorrer ciertas distancias, dándose cuenta de que la distancia recorrida no aumentaba de forma lineal respecto al tiempo. Posteriormente, midió el espacio recorrido por la esfera en tiempos iguales, llegando a la conclusión de que el espacio recorrido aumentaba con el cuadrado de tiempo.

En un principio, Galileo logró establecer relaciones de lo cuadrático entre el tiempo y la distancia recorrida por un móvil (esfera) mediante la geometría, basándose en las propiedades de las cónicas de Apolonio, particularmente en la parábola. Por esta razón, en su obra *Diálogos sobre dos nuevas ciencias* explicó que, si un cuerpo se mueve a través del plano inclinado despareciendo el apoyo en el punto C (ver Figura 1), le sobreviene un movimiento natural descendente a lo largo de la perpendicular CJ. Ahora, suponiendo que la línea CF representa el paso del tiempo, distribuido en intervalos iguales, se toman las líneas perpendiculares a esta línea, como por ejemplo DK, luego una línea cuatro veces mayor, es decir EL, y así sucesivamente según las proporciones cuadradas correspondientes a cada una las líneas que representan los tiempos CD, CE, CF. Esto sucede porque la esfera que se mueve de C a D con movimiento uniforme recibe un movimiento de caída libre perpendicular debido a la distancia DK. Por tanto, en el instante CD, la esfera se encuentra en el punto K.

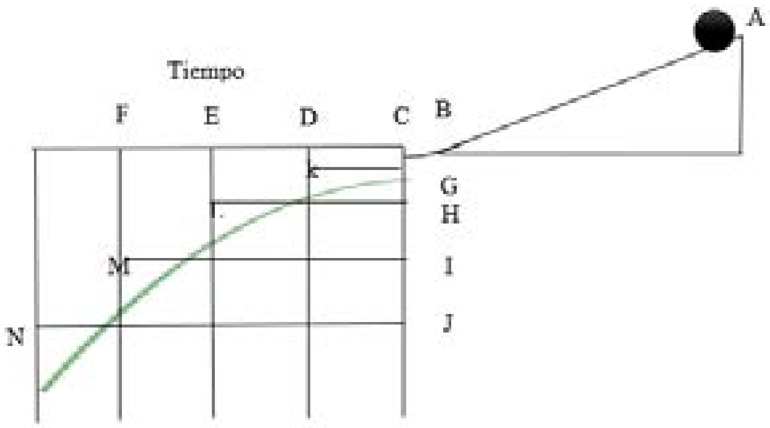

Figura 1. Reconstrucción del dispositivo sugerido por Guidobaldo a Galileo

Nota. Elaboración propia, adaptado de *A hombros de gigantes*, por S. Hawking, 2010, Crítica y Galileo's theory of projectile motion, por R.H. Naylor, 1980, *Isis, 71.*

Asimismo, si se demuestra para el tiempo CE, el cual es el doble del tiempo CD, la esfera habrá descendido una distancia que es cuatro veces mayor que el primer espacio DK. De esa manera, Galileo, a través de la geometría, logró establecer que los espacios recorridos por la esfera con un movimiento naturalmente acelerado son proporcionales a los cuadrados de los tiempos, evidenciando que los puntos K, L, M, N están sobre una misma parábola (Hawking, 2010).

Ahora bien, dejando un poco de lado el análisis geométrico realizado por Galileo, los datos experimentales que obtuvo también fueron muy precisos. Tal como se mencionó anteriormente, trató de obtener relaciones de lo cuadrático por medio de la experimentación. En la reconstrucción del experimento (ver Figura 2), Naylor (1980) siempre se soltaba la esfera desde el mismo punto entre A y B. Para ello, las mediciones se realizaban sobre una tabla que tenía nueve líneas equidistantes, separadas a 200 puntis (1 punti = 0,95 mm aproximadamente). Lo anterior, debido a las proporciones utilizadas por Galileo, de las cuales la primera estaba debajo de C. Para lograr relacionar las dos variables (tiempo y distancia), se subía o se bajaba el tablón para que la esfera, al lanzarse, coincidiera con la segunda línea. Posteriormente, se volvía a justar para que coincidiera con la siguiente línea, hasta que el movimiento de la esfera se ajustara a la forma de una ecuación cuadrática.

Vale la pena mencionar que Galileo no establece como tal una ecuación cuadrática a partir de los resultados de su experimento, solamente trataba de comparar el fenómeno físico con un modelo matemático en este caso con una parábola. Los datos obtenidos por Galileo y Naylor (1980) difieren en la Tabla 2, donde se puede percibir que el error experimental de Galileo es muy pequeño, alrededor del 2 %, según Naylor (1980). De igual manera, cabe mencionar que Galileo medía el tiempo con un péndulo y un reloj de agua diseñado por él mismo con el fin de registrar lo más aproximado posible la distancia recorrida por el móvil en una unidad de tiempo, constituyendo las bases de lo que ahora se conoce como movimiento uniforme (Moscoso-Martínez et al., 2022).

> Según Naylor (1980), en el desarrollo de esta práctica experimental, Galileo señaló que en la unidad de tiempo establecida por la distancia recorrida por la esfera era de 33 puntis. De esta manera, al relacionarla con puntos

representativos de una parábola (por ejemplo: 1,1), se dio cuenta de que la razón entre las distancias obtenidas de manera experimental y el cuadrado de los tiempos era la misma (por ejemplo: 526/16≈33.) En ese orden de ideas, es posible concluir que Galleo estaba comprando estos puntos obtenidos de manera experimental con los puntos y propiedades de una parábola particularmente basado en Apolonio, tal como queda explícito en la obra A hombros de Gigantes, (Hawking, 2010).

Tabla 2. Comparación de los datos obtenidos por Galileo y Naylor

Puntos representativos de una parábola		**Distancias obtenidas de manera experimental por Galileo (puntis)**	**Columna 2 x 33**	**Porcentaje de diferencia en las columnas 3 y 4**	**Datos del experimento reconstruido por Naylor (puntis)**
1	1	33	33	0	33
2	4	130	132		133
3	9	298	297	+0,3	296
4	16	526	528	-0,4	530
5	25	824	825	-0,1	828
6	36	1192	1188	+0,4	1190

Nota. Adaptado de "Galileo's theory of projectile motion," por R. H. Naylor, 1980, *Isis, 71.*

Ahora bien, si se sigue un método más moderno para entender mejor a Galileo y el plano inclinado para comprender las relaciones de lo cuadrático en el movimiento de proyectiles, se sugiere en Villamar (2020) que el desplazamiento de un móvil no es directamente proporcional al tiempo, puesto que su velocidad es variable. Por lo tanto, si se desea ajustar los puntos correspondientes a los datos obtenidos, se debe elevar al cuadrado el tiempo

De esta manera, se puede entender el origen de lo cuadrático en el movimiento de proyectiles y la razón por la cual este tipo de problemas, presenten en la educación básica y media, como, por ejemplo: "Un proyectil describe una trayectoria dada por la función , donde representa la altura alcanzada por el proyectil (metros) y el tiempo transcurrido desde su lanzamiento (segundos)", se asocian gráficamente a parábolas o semiparábolas y a los cuadrados de los tiempos. No hay duda de que este tipo de experimentos y fenómenos dependen de muchas más variables, pero esto será un tema de una discusión futura.

Conclusiones

Los elementos que emergen del experimento de Galileo sobre el movimiento de proyectiles proporcionan herramientas para un futuro diseño de tareas o estrategias didácticas en el aula, las que están direccionadas en los siguientes aspectos:

- Teorema I. Proposición I: "un proyectil que se desliza con un movimiento compuesto por un movimiento horizontal y uniforme y por un movimiento descendente, naturalmente acelerado, describe, con dicho movimiento, una línea semiparabólica" (Hawking, 2010, p. 518). Así, Galileo logró establecer el movimiento de proyectiles gracias a las cónicas de Apolonio y a los Elementos de Euclides, así como la trayectoria de los proyectiles.

Si una superficie es generada por la rotación de una recta de punto fijo A y otro B que se mueve dentro de una circunferencia, el sólido contenido en dicha superficie es un cono recto u oblicuo de vértice A y base BC. Si este cono es seccionado por un plano que pasa por el diámetro de la base y el vértice, se obtendrá un triángulo ABC, y si también es seccionado por un plano paralelo a la base se obtendrá un círculo. Después el cono será seccionado por otro plano que pasa por la línea DE que es perpendicular al diámetro de la base; este último plano será paralelo a uno de los lados restantes del triángulo ABC: la sección resultante será una parábola. Ahora bien, se busca demostrar que el cuadrado de KL es igual al rectángulo HF, FL; lo que se denomina el síntoma de la parábola. (Vargas, 2021, p. 273)

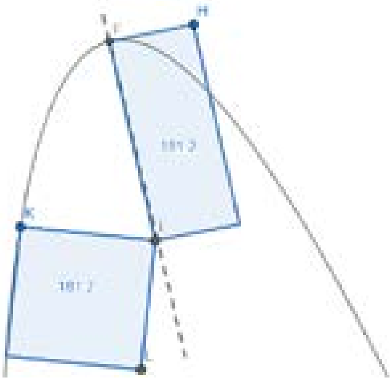

Figura 2. Relación entre segmentos y áreas en una parábola.

De este modo, Vargas (2021) evidenció que $KL^2 = HF.FL$, en notación actual, se puede escribir como $y^2=ax$, con lo que se establece una relación matemática entre las proporciones geométricas y el álgebra. Así, se determina la relación cuadrática entre los puntos de la parábola, por lo que Galileo tomó la decisión de comparar puntos de la parábola con puntos que marcaban la trayectoria de la esfera, con el propósito de establecer un comportamiento cuadrático en dicho movimiento. Asimismo, se instaura una relación lineal entre el espacio recorrido por un móvil en un tiempo al cuadrado es lineal, cuando el objeto se mueve parabólicamente.

El experimento sobre el movimiento de proyectiles destaca el método experimental como una herramienta clave en la construcción del conocimiento, basado en la observación de fenómenos, como la práctica de artilleros venecianos. Galileo propuso una relación entre el movimiento de la esfera y los puntos de una parábola, experimentó con un plano inclinado y matematizó el análisis del fenómeno mediante expresiones cuadráticas. Este estudio resalta el contexto de significación del movimiento de proyectiles y sugiere estrategias didácticas basadas en la experimentación para la enseñanza de lo cuadrático. Y así mismo, la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, ofrece un marco teórico para analizar este fenómeno integralmente, fundamental para diseñar estrategias educativas efectivas en matemáticas.

Referencias bibliográficas

Altshuler, J. (2002). *A propósito de Galileo.* Secretaría de Educación Pública.

Álvarez, G. J., & V, P. (2003). La obra de Galileo y la conformación del experimento en la física. *Rev. Mex. Fis., 49*(1), 62-74.

Álvarez, J., & Posadas, V. (2002). La obra de Galileo y la conformación del experimento en la física. *Revista Mexicana de Física,* (49), 61 – 73.

Amaguaya, J., & Castro, I. (2022). *El aprendizaje activo en la conceptualización del movimiento de proyectiles utilizando simulaciones interactivas* [Universidad de Guayaquil]. https://repositorio.ug.edu.ec/items/354719de-7054-42e0-a54a-77f57f78914c

Arias, J. H., & Burgos, C. A. (2020). Procesos aplicados por los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos: caso de estudio sobre la función cuadrática. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias, 15*(2), 284–302. https://doi.org/10.14483.

Arredondo, J., & Mendoza, F. (2019). Las matemáticas y las tecnologías de la información y comunicación. *International Journal, 5*(2) , 59-75.

Banfi, A. (1967). *Vida de Galileo Galilei.* Alianza Editorial.

Bell, E. (2016). *Historia de las matemáticas.* Fondo de Cultura Económica.

Bombal, M. (2014). *Bombal. Obras Completas.* Zig-Zag.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Gedisa.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., & Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(3), 91-116.

Castillo, L., & Peña, D. (2019). *Desarrollo histórico de la experimentación en Galileo Galilei. Plano inclinado* [Universidad del Magdalena]. https://repositorio.unimagdalena.edu.co/items/6e4e5d28-5f31-4f80-a41a-4d468e3f8c26/full

Corcho, R. (2012). *El método científico galileo.* RBA Coleccionables, S.A.

Córdoba, O. (2021). *Diseño de un proyecto de aula que contribuya al aprendizaje significativo crítico de la función cuadrática mediante el software GeoGebra en los estudiantes del grado noveno de la educación básica secundaria* [Universidad Nacional de Colombia]. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/81459

Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* https://www.researchgate.net/publication/272164000_Las_argumentaciones_matematicas_desde_la_vision_de_la_socioepistemologia

De la Cruz, F., & Hernández, H. (2018). Estudio del concepto de función a través de la modelación-graficación en situaciones de movimiento. En A. L. Educativa, *Sema, L;; Páges, D* (págs. 1821-1826). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Dorce, C. (2019). Evaluación del impacto que tiene la implementación de actividades relacionadas con la historia de las matemáticas en el proceso de enseñanza-aprendizaje del alumnado. *Duc. Mat., 31*(3), 237-262. https://doi.org/10.24844/em3103.10.

Dou, A. (1999). *Las teorías del movimiento de los proyectiles y de las paralelas de Aristóteles a Einstein.* https://scholar.archive.org/work/lhf3c6ps5napvbn6raosj3sxpa

Duarte, J. (2011). El mundo físico de Aristóteles. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias, 6*(1), 62–70. https://doi.org/10.14483/23464712.5120.

Espinoza, C. A. (2020). *Modelación de la función cuadrática mediada por tracker en estudiantes de quinto grado de secundaria.* https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/20.500.12404/17784/ESPINOZA_BENITE S_CRISTIAN_ANDRES%20(1).pdf?sequence=1

Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico.* Cinvestav - IPN. México.

García, A. X., & Moreno, Y. A. (2020). La experimentación en las ciencias naturales y su importancia en la formación de los estudiantes de básica primaria. *Bio-grafía, 13*(24), https://doi.org/10.17227/bio-grafia.vol.12.num24-10361.

Guaypatin, O., Fauta, S., Gálvez, X., & Montaluis, D. (2021). La influencia de la matemática en el desarrollo del pensamiento. *Bol.Redipe., 10*(7), 106-12. https://revista.redipe.org/index.php/1/article/view/1352.

Hawking, S. (2010). *A hombros de gigantes.* Crítica.

Hemleben, J. (1967). *Galileo.* Biblioteca Salvat de Grandes Biografías.

Iommi, V. (2011). El movimiento de proyectiles en la mecánica de Diego Hurtado de Mendoza y la nueva dinámica renacentista. *Asclepio, 63*(1), 179–192. https://doi.org/10.3989/asclepio.2011.v63.i1.490

Jiménez, C. (2016). Ciencia vs. religión: un conflicto imposible en tiempos del caso Galileo. *Revista Disputatio, 5(6)*, 2.

Kieran, C. (1989). *The early learning of algebra: A structural perspective.* NCTM y Lawrence Earlbaum.

Koyré, A. (1966). *Estudios galileanos.* Siglo Veintiuno.

López, F. (1989). *Galileo, hombre de ciencia.* SM.

López, L., & Montiel, G. (2022). Emergencia de las ecuaciones paramétricas en Viète y Descartes. Elementos para repensar la actividad analítica-algebraica. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias, 17*(3), 539-559. 10.14483/23464712.17062.

Manzo, S. (2021). El canon de la filosofía moderna europea en las universidades argentinas (1780-1920). Genealogías, críticas y desafíos. *Revista de filosofía práctica e historia de las ideas, 23*, 1-21.

Mesa, Y. (2008). *El papel de Galileo Galilei en la construcción histórica del concepto de función cuadrática.* https://www.academia.edu/905918/El_papel_de_Galileo_Galilei_en_la_construcci%C3%B3n_hist%C3%B3rica_del_concepto_de_funci%C3%B3n_cuadr%C3%A1tica

Mora, C. (2003). Estrategias para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. *Rev. Ped., 24*(70), 181-272.

Moscoso-Martínez, M., Vivanco-Román, J., Calle, L., & Chaglla-Supe, D. (2022). Modelamiento matemático y análisis oscilatorio del péndulo físico. *Pol. Con., 7*(2), 743-755.

Naylor, R. (1980). Galileo's theory of projectile motion. *Isis, 71*, 550-570.

Nolla, R. (2001). *Estudis i activitats sobre problemas clau de la Història de la Matemática (Vol. 2).* Institut d'Estudis Catalans.

Ortiz, E., Vergel, M., & Villamizar, F. (2020). *Experiencia didáctica para la introducción de la función cuadrática en nivel secundaria a parir de la modelización de un fenómeno físico con las tecnologías digitales.* http://funes.uniandes.edu.co/23833/1/Ortiz2020Experiencia.pdf

Pinedo, E., & Robles, D. (2011). *Relación entre el conocimiento matemático y las habilidades sociales con el éxito escolar a edad temprana.* http://ciruelo.uninorte.edu.co/

Puerta, G. (2009). *Galileo Galilei, Y sin embargo se mueve.* Panamericana Editorial.

Quiñones, C. (2012). Galileo galilei: descubrimientos y logros. *Revismar, 1*, 71-77.

Rivera, J., Rivera, Y., & Cabrera, E. (2019). Evolución histórica del concepto cantidad de movimiento. *Lat. Am. J. Phys. Educ. 13*(2), 1-6.

Rodríguez, M. (2011). La ética en la praxis de la tríada: matemática – cotidianidad – y pedagogía integral. . *Revista Educación y Desarrollo Social, 5*(1), 175-184.

Strathern, P. (2015). *Curie y la radiactividad.* Siglo XXI de España Editores.

Tapia, R., & Murillo, J. (2020). El método Singapur: sus alcances para el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Muro de la Investigación, 5*(2), https://revistas.upeu.edu.pe/index.php/r-Muro-investigaion/article/view/1322/1659.

Tocto, J. S., Vivanco, J., & Quizhpe, I. A. (2023). Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de pedagogía de las matemáticas y la física. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, 7*(2), 7225-7244. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v7i2.5864

Torrellas, L. L., & Romano, E. S. (2018). La socioepistemología una aproximación teórica para educar en valores. *Red de Investigación Educativa, 1*(2), 1-13. https://revistas.uclave.org/index.php/redine/article/view/1298

Vargas, L. (2021). *Un Estudio Histórico-Epistemológico sobre la Construcción Social de las Secciones Cónicas en Geometría del Espacio. [Tesis de Maestría].* Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Villamar, A. (2020). *Estrategias metodológicas para la conceptualización del movimiento rectilíneo uniformemente variado utilizando problemas abiertos* [Universidad De Guayaquil]. https://repositorio.ug.edu.ec/server/api/core/bitstreams/44c23fc5-c3db-45ae-91de-857691ec6aad/content

Wardhaugh, B. (2010). *How to read historical mathematics.* Princeton University Press