



# La descomposición genética como herramienta para matemáticos, ingenieros y licenciados en la enseñanza del cálculo: Investigación en educación matemática<sup>1</sup>

Luis Alberto Jaimes C.\*

Rafael Felipe Chaves E.\*\*

Jeannette Vargas Hernández\*\*\*

## RESUMEN

Se admite la necesidad, en la investigación en Educación Matemática, de modelos que ayuden a predecir el aprendizaje y doten de herramientas a profesionales que asumen la tarea de enseñar Cálculo. Se plantea el caso de la descomposición genética como un elemento de la Teoría APOE que permite describir las construcciones mentales de los estudiantes para comprender un concepto matemático. Se presenta el esbozo de una descomposición genética de la ecuación diferencial que modela un problema de mezclas; como un ejemplo de la estructura y su potencia para predecir una ruta del aprendizaje de los conceptos matemáticos en el aula.

<sup>1</sup> Ponencia presentada en el IX Simposio Nororiental de Matemáticas. Diciembre 2 – 4, Bucaramanga, Colombia.

## INTRODUCCIÓN

Existen diferentes teorías en el campo de la Educación y Didáctica de la Matemática; cada una de ellas se enfoca en los objetos de investigación desde una perspectiva que le permite identificar y caracterizar los aspectos o los vínculos que considera de interés examinar para presentar alternativas y conclusiones, de cara a enriquecer la teoría o la práctica de la enseñanza de las matemáticas.

El grupo de investigación BIOMA, ha indagado en la enseñanza y aprendizaje de conceptos de precálculo; en la línea del pensamiento matemático avanzado, centrando su mirada en los profesores y en los procesos de comprensión de los estudiantes. En el análisis de la práctica



de los docentes ha indagado valiéndose de la teoría sociocultural y utilizando algunos conceptos de la teoría APOE (Vargas, 2013) como también ha integrado en las propuestas para formación de docentes (Vargas, Castañeda & Novoa 2014; 2016) elementos de dicha teoría con la noción conocimiento didáctico del contenido. De manera similar Chaves & Jaimes (2014) han tomado la Teoría APOE como marco teórico y metodológico al analizar la comprensión de un concepto matemático en estudiantes de pregrado.

Atendiendo a nuestro presente objetivo, entenderemos, como lo expresa Arnon et al. (2014), que la Teoría APOE se centra sobre los modelos que podrían estar sucediendo en la mente de un estudiante cuando está tratando de aprender un concepto matemático. En la investigación con APOE se usan estos modelos para diseñar materiales de instrucción y/o para evaluar el éxito o el fracaso de los estudiantes en la tarea de resolver problemas matemáticos. En particular consideramos que uno de los roles de esta teoría es ayudar a predecir qué podrían estar aprendiendo los estudiantes acerca de determinado concepto matemático y las condiciones en que este aprendizaje se daría. En la teoría APOE, es la descomposición genética la que juega el papel de un modelo hipotético que describe las construcciones mentales y los mecanismos de construcción.

### **SABER MATEMÁTICO Y SABER DIDÁCTICO**

¿Saber matemáticas y/o enseñar matemáticas? es un interrogante que desde nuestra experiencia hemos discutido con otros profesionales de los campos de la matemática y la educación matemática. En estas discusiones siempre sobresale la posición de algunos profesionales que consideran que para enseñar matemáticas prima el saber matemático, mientras que otros profesionales sostienen que debe primar el saber didáctico y pedagógico. Definir quién

tiene la razón no es objetivo de este trabajo, lo que sí es importante es exponer alternativas que conectan estas dos posturas. En este documento se asume la Teoría APOE como un punto de convergencia entre la postura de los diferentes profesionales que aceptan la tarea de enseñar cálculo.

### **LA TEORÍA APOE Y LA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA**

La Teoría APOE desarrollada por Ed. Dubinsky (1991) y el grupo Research in Undergraduate Mathematics Education Community (RUMEC), está basada en las ideas introducidas por Piaget, específicamente en el concepto de Abstracción Reflexiva; usando este concepto para describir cómo un individuo comprende un concepto matemático.

Esta teoría plantea un ciclo de investigación que involucra tres componentes; análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza y la recolección y análisis de datos. Es en el primer componente (análisis teórico) en el que se diseña una descomposición genética (preliminar), la cual, como se dijo anteriormente, describe las construcciones mentales que deben realizar los estudiantes para comprender un concepto matemático. Así mismo Hernández y Trigueros (2012) definen la descomposición genética como:

[...] un modelo que se construye a partir del análisis de las construcciones cognitivas que se requieren para el aprendizaje de dicho concepto. En ella se incluyen las acciones, los procesos y la forma en que estos se coordinan e interiorizan, de tal forma que se posibilite el encapsulamiento del concepto [...] (p. 71)

La descomposición genética tiene dos componentes del modelo de comprensión APOE: las formas de conocer: acción, proceso, objeto y esquema, y los mecanismos de construcción: interiorización, inversión, coordinación

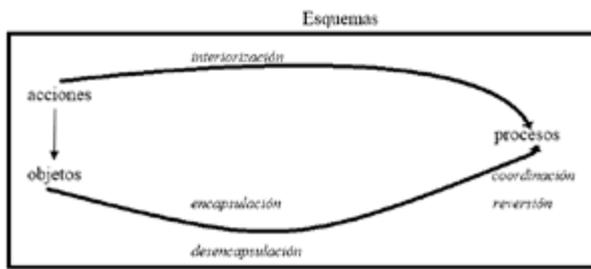


Figura 1. Formas de conocer y mecanismos de construcción en la teoría APOE.

Se llaman construcciones mentales a todas aquellas transformaciones que realizan los estudiantes para resolver una tarea y que les permita obtener significado de ellas (Bermúdez, 2011). En la teoría APOE las construcciones mentales que se consideran son: acción, proceso, objeto y esquema. A continuación se describe cada una de ellas:

**Acción:** una acción es cualquier actividad mental o física que transforma de alguna manera un objeto físico o mental. Como resultado, las acciones tienden a ser algorítmicas por naturaleza y en forma externa (Clark et al., 1997). Aunque puede considerarse que una concepción acción es la construcción mental más elemental es importante aclarar que es necesaria para la comprensión de un concepto, debido a que las acciones son las que permiten realizar un primer contacto con los objetos matemáticos, y esto se logra a través de las experiencias del individuo al tratar con el objeto. Una acción es interiorizada por la repetición de la acción y el reflejo de la misma, esto es, la acción no se produce por alguna influencia externa, y en consecuencia se vuelve en una construcción interna llamada proceso.

**Proceso:** Decimos que el individuo posee una concepción proceso del concepto cuando puede reflexionar sobre el concepto, sin realizar acciones específicas sobre él. Sin embargo, un proceso también puede generarse por la coordinación o reversión de dos o más procesos; este mecanismo permite establecer relaciones

entre los procesos (conectores lógicos) para determinar un nuevo proceso, ya sea realizando nuevas transformaciones o deshaciendo las secuencias de dichas transformaciones. Cuando el estudiante puede reflejarse en un proceso y transformarlo por medio de una acción, el proceso se considera como encapsulado para convertirse en un objeto (Meel David E, 2003).

**Objeto:** Si un individuo puede reflexionar de manera más general sobre un proceso particular, y lo concibe como una totalidad y si puede efectuar transformaciones sobre el mismo, se dice que ha alcanzado una concepción objeto. Esto es, una vez encapsulado el proceso, el objeto existe en la mente del individuo y necesita la asignación de una etiqueta para el objeto (Dubinsky & McDonald, 2001). Esta etiqueta creada permite al individuo (estudiante) nombrar el objeto y conectar dicho nombre con el proceso a partir del cual se construyó el objeto perseguido; por lo tanto si el individuo es capaz de desencapsular el objeto y regresar al proceso que permitió llegar hasta él entonces podrá utilizar las características propias de la naturaleza del objeto para realizar nuevas transformaciones a partir de él.

**Esquema:** Según Dubinsky (1991), un esquema se caracteriza por su dinamismo y su reconstrucción continua según lo determinado por la actividad matemática del individuo en situaciones matemáticas específicas. La coherencia de un esquema viene dada por la capacidad del individuo de determinar si se puede utilizar en el tratamiento de una situación matemática particular. Una vez que el esquema se construye como una colección coherente de estructuras (acciones, procesos, objetos, y otros esquemas) y las conexiones que se establecen entre esas estructuras, pueden transformarse en una estructura estática (Objeto) y / o utilizarse como una estructura dinámica que asimila otros objetos relacionados o esquemas. Los esquemas son entonces construcciones



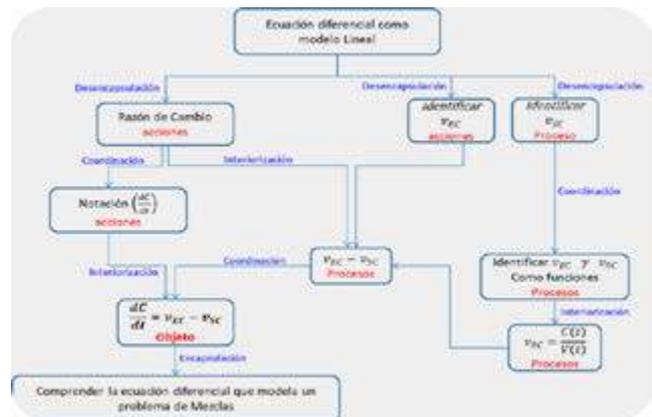
mentales que contienen la descripción, organización y ejemplificación de las estructuras mentales que un individuo ha construido en relación a un concepto matemático.

Es en la construcción de la descomposición genética preliminar donde el saber matemático de los investigadores es fundamental para describir de manera detallada el concepto matemático a estudiar. De igual forma para establecer cuáles son las construcciones mentales que deben realizar los estudiantes, y los mecanismos mentales (abstracciones reflexivas) como interiorización, encapsulación, desencapsulación, coordinación y reversión. Cabe notar que en el proceso del diseño de la descomposición genética preliminar son los investigadores quienes proponen, basados en su experiencia en el aula (saber profesional), una descomposición genética del concepto por estudiar; posteriormente, a través de la propia investigación, dicha descomposición se refina, de modo que describa qué hacen los estudiantes cuando trabajan ese concepto.

Dada la importancia de la descomposición genética, que trazan los investigadores, en muchos casos ellos recurren al estudio del desarrollo histórico de los conceptos, como es el caso de Vargas (2013) y González y Vargas Hernández (2015). En su diseño también se acude al reconocimiento de las dificultades que los estudiantes presentan en la comprensión de los conceptos, ya sea obteniendo la información directamente en el aula o a través de los resultados de otros investigadores (Chaves y Jaimes, 2014). De manera similar, el tratamiento que se da al concepto en los libros de texto, puede transformarse en datos para la descomposición preliminar. La triangulación de la información para gestar una descomposición genética es una de las tareas que enriquece a quienes la están esbozando y gesta un marco de referencia para formar a los profesionales que la deseen utilizar.

La investigación en educación matemática ha aportado descomposiciones genéticas de diferentes conceptos, como ejemplos podemos citar los trabajos de Vargas (2017), Vargas, González y Llinares (2011) concernientes a la función exponencial; Roa-Fuentes y Oktaç (2010), el concepto de transformación lineal; Chaves y Jaimes (2014) sobre la ecuación diferencial que modela un problema de mezclas, y una descomposición genética para el concepto de recta tangente de Orts, Llinares y Borges (2015), entre otros.

Para ilustrar la estructura de una descomposición genética preliminar, utilizaremos el caso de la ecuación diferencial que modela un problema de mezclas.



El diagrama exhibe algunas acciones, procesos y los correspondientes mecanismos de construcción; interiorización, coordinación y encapsulación que han sido identificados por los investigadores (Chaves y Jaimes, 2014).

La experiencia como docentes del curso de ED, lleva a reflexionar sobre la forma como se comprende un concepto en la etapa de formación pre gradual y la diferencia que hay cuando el concepto ha sido encapsulado. En el caso de la ecuación , es la derivada de la concentración de sustancia con respecto al tiempo ; es la velocidad de entrada de la concentración; es la velocidad de salida de la concentración.



En cuanto a las construcciones de los estudiantes, en clase los profesores observan que un método práctico para los estudiantes implica tomar la ecuación y buscar valores para reemplazar, este es un ejercicio mecánico, incluso no es necesario saber el porqué de la igualdad. En otros casos algunos estudiantes utilizan la notación sin saber ésta que representa, ellos consideran que es el resultado de dividir la sustancia en otra variable como el volumen, tiempo, etc. y no la ven como una razón de cambio de la cantidad de sustancia con respecto al tiempo.

## CONCLUSIONES

La triangulación de la información para diseñar una descomposición genética es una de las tareas que enriquece los conocimientos de quienes la están esbozando y gesta un marco de referencia para formar a los profesionales que la deseen utilizar.

Identificar y utilizar las construcciones mentales que hacen los estudiantes al comprender un concepto, son estrategias que pueden cambiar la práctica profesional docente e impulsar un cambio en la enseñanza tradicional del cálculo.

La teoría APOE y su elemento principal; la descomposición genética, puede considerarse como un punto de convergencia de diferentes profesionales; matemáticos, ingenieros y/o licenciados, cuya labor está relacionada con la enseñanza del cálculo, y deseen mejorar sus prácticas de enseñanza, o aportar a la investigación en educación matemática.

Algunos temas incluidos en el curso de ED se convierten en aplicación de algoritmos que ocultan la complejidad e importancia de un objeto matemático. La descomposición genética presentada en este trabajo evidencia que un objeto matemático por muy "simple" que parezca o que algunos libros de texto presenten de forma

trivial, implica un conjunto de construcciones mentales y mecanismos de construcción que los estudiantes requieren desarrollar para lograr su comprensión, como es el caso de la ED.

## REFERENCIAS

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). APOS Theory. A framework for research and curriculum development in Mathematics Education. New York, Heidelberg, Dordrecht, London: Springer

Bermúdez, E. (2011). Comprensión del concepto de integral definida, el caso de un alumno universitario. (Tesis Doctoral). Universidad de Salamanca. España.

Clark, J., Cordero, F., Com-ill, J., Czarnocha, B., DeVries, D., St. John, D., Tolia, G. & Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule. *Journal for Mathematical Behavior*, 16(4), 345 - 364.

Chaves, R. y Jaimes, L. (2014). Descomposición genética de la ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas. Tesis de maestría no publicada. Universidad Pedagógica Nacional.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-126). Springer Netherlands Dubinsky, E. y McDonald, M. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergrad mathematics education research. En D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI Study* (pp. 273-280). New York: Kluwer Academic Publishers.

González, M. T., & Vargas Hernández, J. (2015). Aportes de la historia de la matemática a la



investigación en DMA. En C. Azcárate, & et al, Didáctica del análisis matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM. Santa Cruz de Tenerife, España: Universidad de la Laguna.

Hernández, L.A. y Trigueros, M. (2012). Acerca de la comprensión de la comprensión del concepto del supremo. *Educación Matemática*, 24(3), 67 – 87.

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 6(3), 221 - 271.

Orts, A., Llinares, S. & Borges, F.J. (2015). Una descomposición genética para el concepto de Recta Tangente. Conference: XIX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática-SEIEM. Septiembre 2015., At Alicante, España, Volume: C. Fernández; M. Molina; N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 459-467). Alicante: SEIEM.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto de transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(1), 89 - 112.

Vargas, J. (2017). Análisis de la práctica del docente universitario de precálculo. Estudio de casos en la enseñanza de las funciones exponenciales. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Salamanca.

Vargas, J., González, M. T. y Llinares, S. (2011). Descomposición genética de la función exponencial: mecanismos de construcción. Comunicación presentada en XIII Conferencia

Interamericana de Educación Matemática. Tecnológica Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil. Recuperado de: <http://www.lematec.no-ip.org/CDS/XIIICIAEM/artigos/1292.pdf>

Vargas, J., Castañeda, M. & Novoa, J. (2014). Un análisis de la representación gráfica de la función logarítmica. Historia y conocimiento didáctico del contenido. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), (p. 605). *Investigación en Educación Matemática XVIII*. Salamanca: SEIEM.

Vargas, J., Castañeda, M. & Novoa, J. (2016). Historia y epistemología de la función logarítmica: conceptualización y marco teórico para la enseñanza del concepto. El caso de la representación de la curva logarítmica. En *Diario de Campo*. Bogotá: Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca.