

ANÁLISIS ONTOSEMIÓTICO DE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN EN EL CURRÍCULO INSTITUCIONAL: El caso de una Institución Educativa Tunjana

Andrés Fabián Álvarez Cipamocha¹

José Francisco Leguizamón Romero²

UPTC, Colombia

RESUMEN

Atendiendo a los principios de la didáctica de las matemáticas, en donde se busca establecer la comprensión y explicación de los procesos de enseñanza y aprendizaje de objetos matemáticos. El currículo institucional, contemplado como la dupla <Estándares Básicos de Competencias y libro de texto>, juega un papel importante en la emergencia de la noción del objeto matemático función. De este modo, como reporte preliminar de una investigación dentro del programa de Maestría

en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, se considera relevante identificar las posibles relaciones existentes entre los significados pretendidos por el currículo de una institución educativa Tunjana y el significado global de referencia del objeto función.

En este sentido, el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática – EOS, brinda una base teórica que soporta la investigación; así mismo, ofrece herramientas para el análisis de texto, las cuales permiten identificar las configuraciones de objetos emergentes e intervinientes en el sistema de prácticas que sugiere la dupla descrita. De esta manera, en el presente documento se describen los principales hallazgos que permitirán evidenciar las relaciones que existan o no dentro

¹ Andrés Fabián Álvarez Cipamocha. Licenciado en Matemáticas Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. afip@hotmail.com Tunja-Boyacá

² José Francisco Leguizamón Romero Doctor en Educación. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. francisco.leguizamon@uptc.edu.co Tunja-Boyacá

de la Institución educativa bajo estudio.

Palabras clave: Didáctica de las matemáticas, currículo, libros de texto, práctica pedagógica, Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática -EOS

INTRODUCCIÓN

Si bien la didáctica de la matemática desde el punto de vista explicativo o comprensivo, busca atender a dos demandas diferentes, en las cuales se comprenda y explique los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, también debe guiar la mejora de dichos procesos (Font, 2013). Así, una parte central dentro de los procesos de instrucción corresponde a las prácticas pedagógicas del profesor, en donde él como institución juega un papel protagónico como mediador entre los diferentes tipos del saber.

De este modo, cuando un profesor de matemáticas planifica un proceso de instrucción sobre un objeto matemático, moviliza diferentes conocimientos personales que previamente han sido adquiridos para delimitar, organizar y establecer el proceso educativo; de este modo, acude a los libros de texto correspondientes y a las orientaciones curriculares en las que se ve inmerso (Godino, 2003). Por lo tanto, un aspecto importante dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje, se fundamenta en los procesos de análisis de textos escolares que debe realizar el profesor de matemáticas.

En este sentido, el docente debe contar con herramientas que permitan evaluar la efectividad de su propia práctica pedagógica y los recursos en los cuales se apoya. En este sentido, Font y Godino (2006) afirman que “el análisis crítico de los textos escolares, la evaluación de su pertinencia, idoneidad, adecuación, etc. debe ser un componente importante en los programas de formación de profesores de matemáticas” (p. 68) y así, en el momento del proceso de instrucción

se lleven a cabo procesos en búsqueda de la consolidación del pensamiento matemático de los estudiantes.

En ningún sentido se puede asumir que la revisión de los textos escolares se establezca para elegir o descartar referentes propuestos por algunas instituciones educativas; por el contrario, busca que el profesor pueda interpretar las fortalezas que encuentra en cada uno. Como especifica D'Amore (2006), “El saber no está en los libros, es la comprensión del libro”; y en este sentido, se requiere que, existan numerosas mediaciones para que el maestro, el saber y el estudiante puedan establecer un proceso de enseñanza y aprendizaje adecuado, atendiendo a los objetos matemáticos que emergen e intervienen en las prácticas matemáticas.

Lo que se aborda a lo largo de este documento pertenece a una fase metodológica que pretende identificar cuáles son las relaciones (si existen) entre el significado pretendido por el currículo institucional y el significado global de referencia del objeto función, como parte de una investigación que se está llevando a cabo dentro de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Para ello, se tiene en cuenta la reconstrucción del significado global de referencia establecido en otro estudio y el cual se enuncia de manera general dentro de los aspectos teóricos de este informe; además se tendrá en cuenta el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática -EOS, como referente teórico y como fuente de herramientas para el análisis de textos.

En el presente artículo, se encontrará una descripción y análisis de la dupla <Estándares Básicos de Competencias y un libro de texto>, propuestos dentro del currículo de una institución educativa Tunjana. De este modo, a lo largo de éste resultado parcial investigativo, el lector se encontrará en primera instancia

con los supuestos teóricos que fundamentan la investigación, así como la forma de descripción y análisis haciendo uso de algunas herramientas que brinda el EOS.

Así mismo, se presenta la metodología usada para establecer las descripciones e interpretaciones del currículo institucional; así, se aborda un tipo de investigación cualitativa que permite descomponer la dupla propuesta, a través de una configuración epistémica, en la que se describan los objetos emergentes e intervinientes en cada uno de los documentos propuestos.

En el siguiente apartado, se encontrará la descripción de cada componente a modo de análisis de datos, allí se muestran las representaciones activadas en los estándares básicos de competencias y la configuración epistémica asociada al libro de texto Tx-1. Finalmente, se realizan unas consideraciones finales, en las que se especifican algunas relaciones y se concretan algunos hallazgos teniendo en cuenta el significado global de referencia del objeto función.

SUPUESTOS TEÓRICOS

Una vez expuesta la problemática de interés, así como las metas propuestas para dar respuesta al interrogante planteado; en el presente capítulo, se especifica el marco teórico que permite contrastar los datos parciales obtenidos de la dupla establecida como currículo institucional <Estándares Curriculares, libros de texto>. De ésta manera, como “no existe ningún dato sin un marco que dé sentido al dato” (Lester citado en Godino, 2010, p. 12), la investigación se ha soportado teóricamente en algunos constructos que van desde la función como objeto matemático, contemplando su reconstrucción histórica y epistemológica, hasta el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática- EOS.

ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA- EOS

Interesados por un consenso claro y compartido sobre un problema epistemológico y cognitivo, relacionado con los objetos matemáticos y su significado dentro de un contexto institucional determinado, se ha desarrollado desde hace varios años y por múltiples investigadores (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Bencomo, Font, Wilhelmi, 2006; Godino, Batanero y Font, 2009) un marco teórico de referencia dentro de la Didáctica de las matemáticas. Para esto, se han concentrado esfuerzos para integrar elementos de múltiples teorías en educación matemática y así, se ha establecido el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática – EOS, como una reflexión sobre la emergencia de los objetos matemáticos a partir de prácticas matemáticas (Font, 2013).

Como marco teórico integrador, parte de la antropología y la semiótica de las matemáticas como presupuestos y modelos usados en el campo de la Educación Matemática, así como en algunos principios de la didáctica socioconstructivista e interaccionista, para los procesos de enseñanza y aprendizaje (Font, Planas y Godino, 2010).

Basados en lo anterior y enmarcados dentro de algunos presupuestos del Enfoque, a continuación se toman algunas premisas como base del presente resultado parcial de investigación, y por lo cual se define que:

Sistemas de prácticas: una práctica matemática es “toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas”



(Godino y Batanero, 1994, p. 8). De este modo, son acciones orientadas para un fin, que pueden ser operativas, discursivas o normativas (Font, 2005), establecidas de manera personal (por el estudiante) o compartidas en el seno de una institución (vista como comunidad de prácticas). Por lo tanto, se establecen dos tipos de sistemas de prácticas, a saber:

Sistema de prácticas institucionales, asociadas a un campo de problemas - (C):

Está constituido por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas C y compartidas en el seno de la institución I. (p. 10)

Sistema de prácticas personales, asociadas a un campo de problemas - (C):

Está constituido por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas C. (p.12)

EMERGENCIA DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS:

Los objetos matemáticos se pueden considerar como “cualquier entidad o cosa a la que nos referimos, o de la que hablamos, no importa si es real o imaginario, siempre que esté involucrado de alguna manera en la actividad matemática” (Font, Godino y Gallardo, 2013, p. 14); por lo cual, son emergentes de los sistemas de prácticas, y se establecen como no ostensivos (a partir de problemas, definiciones o proposiciones) y ostensivos (representan los no ostensivos de manera textual, verbal, gestual, etc.). Dado el carácter del sistema de prácticas del cual emergen, pueden ser personales o institucionales (Godino, et al. 2009; Godino y Font, 2007).

Objeto institucional :

Es un emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de . Los elementos de este sistema son los indicadores empíricos de

Objeto Personal :

Es un emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de (Godino y Batanero, 1994, pp.11-12).

CONFIGURACIONES DE OBJETOS EMERGENTES E INTERVINIENTES DEL SISTEMA DE PRÁCTICAS:

Al llevar a cabo una práctica, se activan y ponen en juego un conglomerado de situaciones-problema, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos que articulan una “configuración” para los objetos primarios. Lo anterior permite establecer los objetos intervinientes en esos sistemas de prácticas, cuando éstas se realizan y se interpretan. En este caso el lenguaje de manera verbal o simbólica se toma como la parte ostensiva de una serie de conceptos, proposiciones y procedimientos (Godino,Font, Wilhelmi y Lurduy, 2009)



Figura 1. Configuración de objetos primarios – configuración epistémica. (Godino, Batanero y Font, 2009)

Basados en la configuración anterior, se propone entonces una tipología de objetos matemáticos primarios, de acuerdo a lo expuesto por Godino, Batanero y Font (2009).

Elementos lingüísticos: (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...)

Situaciones – problemas: (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios, ...)

Conceptos- definición: (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función,...)

Proposiciones: (enunciados sobre conceptos,...)

Procedimientos: (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo,...)

Argumentos: (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo,...). (p.8)

SIGNIFICADO INSTITUCIONAL Y PERSONAL DE UN OBJETO MATEMÁTICO: el significado de los objetos matemáticos se refieren a una acción realizada por parte de un individuo, independientemente si es interiorizada o no, con respecto a objetos matemáticos dentro del sistemas de prácticas (Godino y Batanero, 1994).

Del mismo modo que los sistemas de prácticas, y por su estrecha relación, los significados de los objetos matemáticos se establecen, también, dentro de la génesis personal o institucional, en específico, “La interpretación semiótica de las prácticas lleva a hablar de significados personales (globales, declarados y logrados) y de significados institucionales (implementados, evaluados, pretendidos, referenciales)” (Godino, Font, Wilhelmi, y Lurduy, 2009, p.4).

Significado de un objeto institucional -

Es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge en un momento dado.

Significado de un objeto Personal -

Es el sistema de prácticas personales de una persona para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto en un momento dado (Godino y Batanero, 1994, p. 13).

Mientras que la enseñanza implica que el estudiante participe en comunidades de prácticas, que respaldan los significados institucionales; por su parte el aprendizaje, supondría la apropiación dichos significados por el estudiante. De este modo, se deben indicar las relaciones dialécticas entre enseñanza y aprendizaje, lo cual sigue un acoplamiento progresivo entre significados personales e institucionales (Godino et al., 2009).



Figura 2. Tipos de significados institucionales y personales. (Godino, 2014, p.14)



SIGNIFICADOS PRETENDIDOS POR EL CURRÍCULO INSTITUCIONAL

Para establecer los significados pretendidos por el currículo de matemáticas, se parte de los presupuestos establecidos por el Enfoque Ontosemiótico y los resultados teóricos expuestos en distintas investigaciones (Godino, 2002; Font y Godino, 2006; Ramos, 2005; Pino-Fan, Castro, Godino y Font, 2013 y Parra, 2015). En donde, el análisis de texto juega un papel crucial en el establecimiento y análisis de las configuraciones epistémicas resultantes de las unidades didácticas en donde se trabaja el objeto matemático de interés para ésta investigación.

Teniendo en cuenta lo expuesto, la estructura de un texto se puede analizar teniendo en cuenta “Configuraciones epistémicas”, las cuales no contemplan a los objetos matemáticos como simplemente conceptos y procedimientos; sino, desde una ontología más amplia respecto a los seis tipos de objetos articulados como: Lenguaje, situaciones-problema, conceptos, procedimientos (técnicas, procesos, etc), proposiciones (propiedades, teoremas, entre otros) y argumentaciones. (Font y Godino, 2006).

Así, se deben establecer dos momentos importantes dentro del análisis de textos; el primero a priori, que permite establecer los posibles conflictos que se originan con el libro de texto, una vez el alumno se hace cargo de funciones semióticas dentro de la interpretación de éste. El carácter a posteriori se puede atribuir desde el punto de vista del profesor ya que es una expresión emitida por el autor con respecto al objeto matemático de estudio (Godino, 2002; Ramos, 2005).

Para el análisis de los libros de texto propuesto, se consideraron y siguieron los cinco criterios, relacionados con el significado de la derivada, adaptado al objeto matemático función, expuestos por Pino-Fan, Castro, Godino y

Font (2013), que complementan y centralizan lo expuesto en investigaciones previas ya nombradas en párrafos anteriores.

Representatividad de los campos de problemas propuestos.

Tipo de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas.

Representatividad de los elementos regulativos y argumentativos

Conocimientos previos a la introducción de la función

Representatividad de los significados institucionales pretendidos (o implementados) respecto al significado global de referencia

SIGNIFICADO GLOBAL DE REFERENCIA DEL OBJETO MATEMÁTICO FUNCIÓN

Así como muchos objetos matemáticos se han ido construyendo a través de la historia de la humanidad, la noción de función se ha ido materializando hasta llegar a la forma en la que se conoce y divulga actualmente. Para el desarrollo de ésta investigación se establece una reconstrucción histórica y epistemológica del objeto matemático función, atendiendo a diferentes épocas históricas, desde la antigüedad hasta hoy. Por lo tanto, se establece una revisión de múltiples tratados de historia de las matemáticas (Bell, 1945; Boyer, 1988; Cajori, 1894; Collete, 1986; 2000; Eves, 1990), así como investigaciones con respecto a la didáctica de la noción de función (Ruiz, 1994; Biehler, 2005; y Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006).

Edad prehistórica:

- Nociones de correspondencia biunívoca a través de relaciones entre objeto – cantidad (Collete, 1986)



- Principios de unicidad y paridad en relaciones a la fisiología del ser humano.

Edad Antigua:

- No se establece un pensamiento variacional por parte de las civilizaciones babilónicas, egipcias, griegas, chinas e hindúes; sin embargo, mostraban generalizaciones de procedimientos numéricos y relacionan magnitudes numéricas variables (Eves, 1990)
- Los Babilonios al ser buenos calculadores tenían un instinto de funcionalidad expresada mediante tablas o correspondencias (Bell, 1945)

Edad Media

- Realización de trabajos funcionales asociados con la astronomía, debido al establecimiento y uso, intuitivamente, de las seis funciones trigonométricas Hofmann (2002).
- Representación gráfica de la variación de cualidades e intensidades como la velocidad y el tiempo de acuerdo a la teoría de latitudes de Nicolás de Oresme (Boyer, 1988)

Edad Moderna

- Avance significativo en el álgebra simbólica (Collette, 1986;2000).
- Trigonometría como disciplina independiente de la trigonometría y avance en la precisión del cálculo numérico de las funciones trigonométricas (Ruiz, 1994)
- Ampliación del manejo de métodos de cálculo, establecimiento de un álgebra simbólico-litera l y una ampliación y manejo del concepto de número permitió avanzar en la noción de función como una representación mediante fórmulas y

como relación entre conjunto de números (Youschkevitch, 1976).

- Uso de las representaciones de curvas de Oresme para la caída de cuerpos por parte de Galileo, quien amplía de cierta manera la noción de función (Ruiz, 1994)
- Presentación de un método analítico para introducir funciones con la nueva relación entre el álgebra y la geométrica por parte de René Descartes y Pierre de Fermat (Youschkevitch, 1976).
- Aparece la dependencia entre dos magnitudes gracias a los trabajos de descartes (Cotret, citado en Ruiz, 1994)
- Se desarrolló las funciones como series de potencias con los nuevos avances de Newton y Leibniz, en donde la función como expresión analítica ocupó un lugar central en el análisis matemático (Boutroux, citado por Youschkevitch, 1976).
- Función como una relación entre magnitudes variables y uso de la letra griega φ por parte de Leibniz y Bernoulli (Ruiz, 1994)
- Función como expresión analítica entre magnitudes variables, clasificadas en uniformes y multiformes, parea e impares, de acuerdo a la definición dada por Euler (Ruiz, 1994)
- Primer uso de la notación

Edad contemporánea

- Uso de variables, dependientes e independientes para definición de una función como en Cauchy (Parra, 2015)
- Función como dependencia entre variables dada como expresión analítica, según concebía Lobachevsky (Parra, 2015)
- Función como correspondencia arbitraria



Figura 4. Representación de las posibles relaciones entre el significado global de referencia y el significado pretendido por el currículo

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Análisis de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas

En este apartado se llevó a cabo un análisis de los estándares básicos de competencias emitidos por el Ministerio de Educación Nacional- MEN como uno de los documentos de referencia en el que se presentan los diferentes aprendizajes que se deben garantizar a los niños y niñas en las instituciones educativas Colombianas.

Para poner en contexto al lector de éste reporte, se describirá de forma concreta el desarrollo de los estándares curriculares y de los objetivos perseguidos por el MEN, al poner en circulación nacional ésta guía para las escuelas nacionales de los dos sectores educativos (Instituciones educativas oficiales y privadas).

Como se ha descrito en párrafos anteriores, la historia de la educación colombiana ha estado llena de esfuerzos por promover una calidad educativa, que garantice que los niños, niñas y jóvenes tengan una educación de calidad que les permita desenvolverse en la sociedad y en el contexto nacional y global. Como resultado de dichos esfuerzos, y contando con el apoyo de múltiples instituciones de educación superior, se han creado documentos de referencia que

hasta la fecha, procuran dar algunas directrices para entes territoriales, directivos docentes y docentes de aula de las escuelas colombianas (Ministerio de Educación Nacional, 1998; 2006)

Los documentos de referencia inician con los Lineamientos Curriculares, de las áreas obligatorias y fundamentales, publicadas y puestas en funcionamiento durante el año 1998. En el caso de la disciplina matemática, se cuenta con un documento propio, el cual fue un proceso de reflexión y discusión sobre la naturaleza de las matemáticas y las implicaciones pedagógicas sobre el campo educativo colombiano (Ministerio de Educación Nacional, 1998, pp. 13-14).

Así, luego de varios años de aplicación y acoplamiento por parte de las instituciones gubernamentales educativas, se establece una nueva guía, que según el MEN (2006) busca establecer una calidad en la educación colombiana; por ello hacia el año 2006, se formaliza el documento número 3, titulado *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemática, Ciencias y Ciudadanas*.

Por lo tanto, teniendo en cuenta que los estándares de competencias están ligados a las competencias que deben alcanzar los estudiantes, éstos se estructuran a lo largo del tiempo y agrupándose por niveles escolares de manera creciente, a saber: de primero a tercero



primaria, de cuarto a quinto primaria, de sexto a séptimo secundaria, de octavo a noveno secundaria, y de décimo a undécimo de media académica o técnica (Ministerio de Educación Nacional, 2006).

Continuando con el propósito de ésta fase, para seguir el respectivo análisis, comenzamos contemplando el nivel dentro del cual se encuentran los estándares de competencias de grado décimo. A raíz de esto, se encuentran algunos relacionados con la noción de función dentro de cada uno de los pensamientos matemáticos.

Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas		Décimo a undécimo			
Al terminar undécimo grado...					
PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS		PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS		PENSAMIENTO MÉTRICO Y CÁLCULO DE MEDIDAS	
<ul style="list-style-type: none"> Analiza representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales. Examina la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos. Compara y contrasta las propiedades de los números (enteros, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para reconocer, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos. Utiliza argumentos de la teoría de números para justificar relaciones que involucran números naturales. Establece relaciones y diferencias entre diferentes actuaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada. 		<ul style="list-style-type: none"> Identifica en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los hechos observados por curvas longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en su caso. Identifica características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesianos y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas. Resuelve problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras. Usa argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otros contextos. Describe y modela fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas. Reconoce e describe curvas e o hazes conónicas. 		<ul style="list-style-type: none"> Describe estrategias para abordar situaciones de medición que requieren gráficas de geometría espacial. Resuelve y formula problemas que involucran magnitudes, como la fuerza medida en newtons debido al desplazamiento como función del tiempo, o el volumen de otros sólidos, como la velocidad angular, la aceleración angular y la densidad angular. Justifica resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición. 	PENSAMIENTO ALGEBRAICO Y CÁLCULO DE DERIVADAS
				PENSAMIENTO VARIACIONAL Y CÁLCULO DIFERENCIAL Y ANALÍTICO	
				<ul style="list-style-type: none"> Interpreta y compara resultados de estudios con información estadística proveniente de métodos de muestreo. Justifica o refuta inferencias basadas en transacciones estadísticas a partir de resultados de estudios que involucran los medios o distribuciones en el ámbito escolar. Describe representaciones algebraicas (de las curvas físicas, naturales o sociales) para estudiar un problema o fenómeno. Describe tendencias que se observan en conjuntos de variables relacionadas. Interpreta nociones básicas relacionadas con el espacio de información como población, muestra, variable aleatoria, distribución de frecuencias, parámetros y estadísticos. Usa conceptualmente algunas medidas de centralización, localización, dispersión y variación (promedio, mediana, moda, desviación estándar, rango, varianza, covarianza y correlación). Interpreta conceptos de probabilidad, sus relaciones e independencia de eventos. Resuelve y plantea problemas usando estrategias básicas de conteo y probabilidad (combinaciones, permutaciones, espacio muestral, muestreo aleatorio, muestreo con reposición). Propaga inferencias a partir del estudio de muestras probabilísticas. 	
<ul style="list-style-type: none"> Utiliza los métodos de aproximación en problemas matemáticos. Interpreta la teoría de derivadas como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrolla métodos para hallar los dominios de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos. Analiza las relaciones operacionales entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas. Modela situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreta y utiliza sus derivadas. 					

Figura 5. Estándares Básicos de Competencias desde grado décimo hasta grado undécimo (Ministerio de Educación Nacional, 2006, pp. 88-89)

Teniendo en cuenta la Figura 5 y los aspectos preliminares, se puede afirmar la existencia de algunos campos de problemas teniendo en cuenta cada estándar dentro de los pensamientos matemáticos que se especifican.

Tabla 1. Campos de problemas asociados a los Estándares relacionados con la noción de función

ESTÁNDAR	PENSAMIENTO MATEMÁTICO	CAMPOS DE PROBLEMAS ASOCIADOS POSIBLES
Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.	Espacial y sistemas geométricos	Problemas que movilizan la función como representación gráfica
Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas.	Espacial y sistemas geométricos	Problemas que movilizan la función como representación gráfica
Resuelvo y formulo problemas que involucren magnitudes cuyos valores medios se suelen definir indirectamente como razones entre valores de otras magnitudes, como la velocidad media, la aceleración media y la densidad media.	Métrico y sistemas de medidas	Problemas que movilizan la función de manera tubular como predicción de cantidades
Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas. .	Variacional y sistemas algebraicos y analíticos	Problemas que movilizan la función como expresión analítica o correspondencia arbitraria
Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas	Variacional y sistemas algebraicos y analíticos	Problemas que movilizan la función como representación gráfica Problemas que movilizan la función como expresión analítica o correspondencia arbitraria

De acuerdo a lo anterior, para el grado décimo existen algunos estándares que contemplan cierto tipo de funciones; a pesar de esto, no se evidencia que se esté tratando específicamente con la noción del objeto función. Lo anterior, presupone que para el nivel elegido, la noción de función ya no figura como primordial dentro del proceso, bien sea por haberse visto en cursos anteriores o que para este ciclo exista una mayor profundidad dentro del estudio de ciertas clases de funciones.

Aun así, se logra identificar algunos campos de problemas asociados al estándar y al pensamiento propuesto, representados en la tabla....; esto, posiblemente permitirá que dentro del proceso de instrucción, el docente pueda contemplar un abordaje de acuerdo al campo de problemas asociados a la noción de función.

Por otra parte, se debe especificar que la función como objeto matemático dentro de la guía, se precisa dentro del pensamiento variacional. En éste se reconoce e identifican diferentes formas y tipos de variación, en donde interviene la descripción y modelación dentro de diferentes registros de representación. “Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje...” (Ministerio de Educación Nacional, 2006, p. 66).

Lo anterior, no implica que las funciones como objeto matemático, se trabajen a partir de un único pensamiento dentro del área, por el contrario existe una seria relación de la función

con los otros pensamientos; sin embargo, los estándares los enmarcan dentro del pensamiento preponderante.

Lo expuesto en la documentación oficial, vislumbra algunas consideraciones importantes dentro de los lineamientos para las instituciones educativas. Al igual que en Parra (2015), en nuestro contexto, se empiezan a mencionar aspectos claves para la noción de función, ya a que tiene en cuenta la caracterización de variables y cambio entre cantidades.

De igual modo, lo descrito permite evidenciar que se procura orientar procesos para que el estudiante recurra a diferentes tipos de representación bajo diversos registros simbólicos dentro de los que se encuentran: verbales, icónicos, gráficos o algebraicos, de acuerdo a Parra (2015), quien considera como representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas las representaciones identificadas en la siguiente tabla.

Tabla 2. Representaciones activadas a partir de los estándares clasificados

Representaciones para $f(x)$						
Emergentes		$f(x)$				
		Gráfica	Simbólico	Tabular	Icónica	
Previos						
Verbal						
$f(x)$	Verbal					
	Gráfica	x	x	x	x	
	Simbólica	x		x		x
	Tabular	x		x	x	x
	Icónica					

Considerando los estándares presentados, se vislumbra que para el primero, si bien refiere que el estudiante deberá desarrollar problemas de su contexto, él debe valerse de representaciones

gráficas que le permitan llegar a la solución de ciertas situaciones; por lo cual, se ve como representación previa la parte gráfica, ya que será la herramienta que posiblemente le permita movilizar representaciones del tipo verbal, Gráfica, Simbólica o Tabular.

En cuanto al segundo, se espera que el estudiante describa y modele fenómenos, a partir de relaciones y funciones trigonométricas; por lo cual, asumiendo el surgimiento histórico de este tipo de funciones, teniendo en cuenta la relaciones existentes, se puede considerar que el estudiante debe hacer uso de manera previa de representaciones tabulares y simbólicas; de ese modo, en algún momento cuando el estudiante describa y modele usará representaciones ya sean verbales, simbólicas o icónicas.

De igual modo, en el tercer estándar, se evidencia que el estudiante debe tener como concepto previo la representación tabular, para luego de resolver una situación, involucre la variación entre magnitudes aludiendo a ejemplos como la aceleración, la velocidad media, entre otros, como relaciones entre magnitudes.

Dentro del análisis de esta primera parte, no es posible llegar más lejos, caracterizando una configuración epistémica detallada, debido a la falta de información y ejemplificación dentro del documento analizado, en éste solo se presenta la guía, a modo de meta alcanzable por el estudiante, más no permite ver los diferentes elementos de la configuración.

ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO TX-1

Como se mencionó en la ruta metodológica, se analizó el currículo institucional, contemplando los estándares básicos de competencias y dos libros de texto que han sido usados tanto por los estudiantes como por los profesores del área de matemáticas, a lo largo de los últimos cuatro años.

Tabla 3. Libros de texto a analizar, como parte del currículo institucional

CODIFICACIÓN ASIGNADA	LIBRO DE TEXTO	PERIODO DE USO	ORDEN DE ANÁLISIS
Tx-1	Conecta Matemáticas 10, Editorial SM, Bogotá, 2013	2014-2016	Primero

Sin embargo, para este reporte, se mostrará el análisis del libro de texto que fue elegido por la institución educativa para acompañar los procesos de enseñanza y aprendizaje a lo largo de un lapso de dos años. Este material, en su momento, fue el apoyo de los docentes para la planeación, implementación y evaluación de las clases de matemáticas, así como el apoyo para los estudiantes, quienes ejecutaban algunas tareas o situaciones presentadas dentro del texto, bajo la indicación respectiva del docente.

El libro consta de ocho (8) unidades temáticas, de las cuales tres (3), de manera explícita, hacen referencia a funciones; sin embargo, solamente la primera trata sobre la noción de función, mientras que las otras dos, hacen referencia a las funciones trigonométricas y trigonométricas inversas. De este modo, teniendo en cuenta el interés de ésta investigación, se dará total importancia a la primera unidad del libro,

titulada *Funciones*, que a su vez se encuentra subdividida en 10 secciones.

El libro de texto Tx-1, bajo su propia consideración, atiende a los lineamientos curriculares del área, adecuándose a los estándares básicos de competencias expuestos en párrafos anteriores. De igual modo, se afirma que algunas de las unidades temáticas hacen énfasis en alguno de los cinco pensamientos matemáticos, en donde las actividades se clasifican en niveles de complejidad (básico, medio y avanzado).

A partir de lo expuesto, para el análisis se eligió solamente la primera secuencia o subtemática titulada *Concepto de Función. Dominio y Recorrido*. Para esto se establece la siguiente configuración epistémica.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA PARA Tx-1

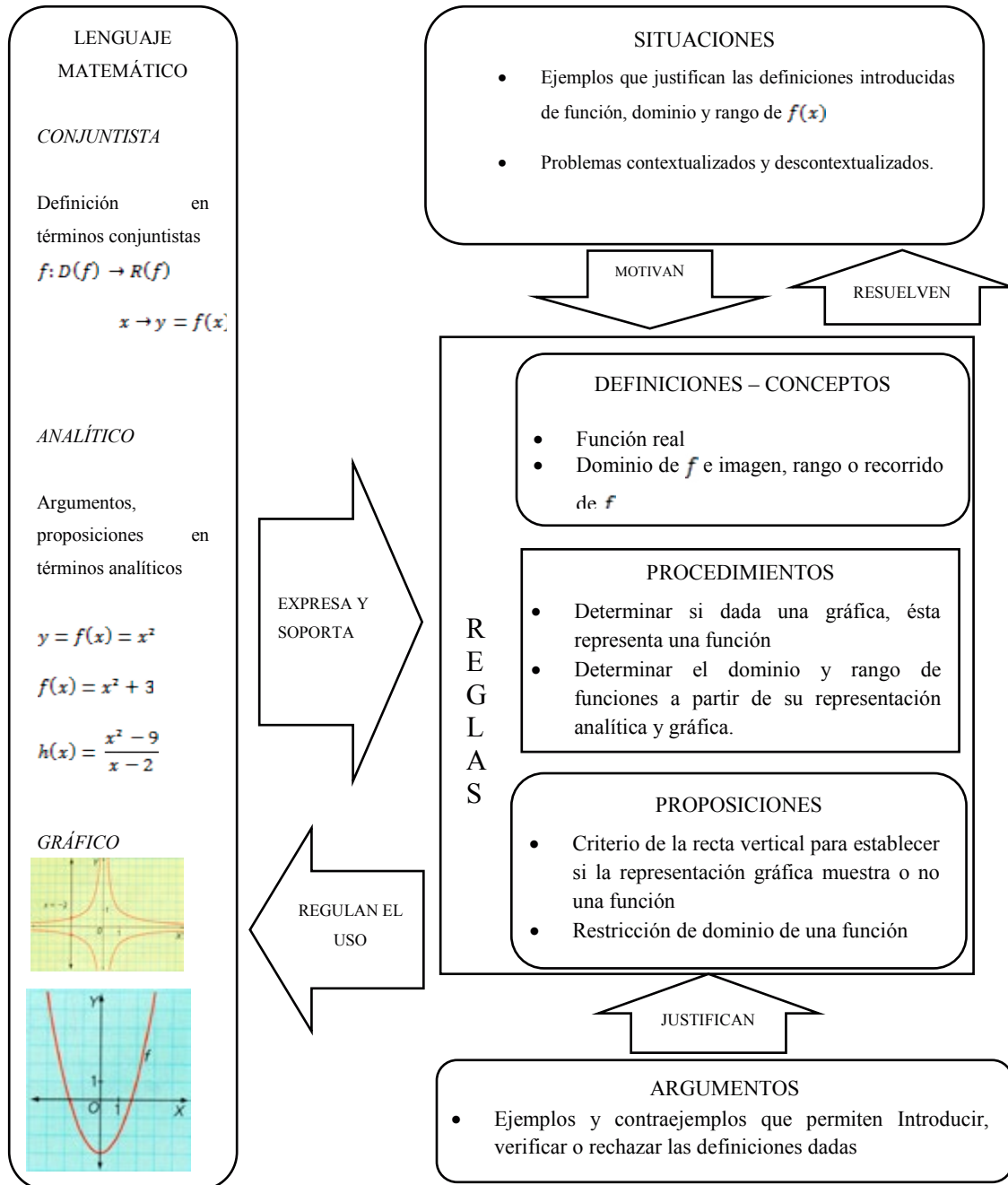


Figura 6. Configuración epistémica como unidad de análisis del libro de texto Tx-1

A partir de la configuración epistémica, se puede establecer que respecto a los *elementos lingüísticos*, identificados dentro de las definiciones, propiedades, argumentos y situaciones problema, se hace un uso del lenguaje de tipo *Conjuntista, Gráfico y Analítico (simbólico literal)*. En menor medida, casi de manera inexistente, se evidencia el uso

del lenguaje *Numérico*, dejando de lado, las representaciones tabulares que identifican a la función como una relación entre magnitudes para predicción de cantidades.

En Tx-1 la noción de función se introduce como una función de variable real, adaptándola como una correspondencia entre conjuntos de números reales, así:

■ Función real

Una **función real f de variable real** es una regla que asigna a cada número x de un subconjunto de \mathbb{R} un único número real y . Se escribe $y = f(x)$, y se dice que y es la imagen de x por f .

El subconjunto de números reales para los que la función está definida se llama **dominio de f** , y se denota $D(f)$. Los valores que toma la imagen forman un subconjunto llamado **imagen, rango o recorrido de f** , y se denota $R(f)$.

$$f: D(f) \rightarrow R(f)$$

$$x \rightarrow y = f(x)$$

Figura 7. Definición de la noción de función en Tx-1

Así, se puede apreciar que la primera definición emergente se hace en términos conjuntistas, aludiendo a una relación entre conjuntos; se debe tener en cuenta que esta definición, establece solamente la función entre conjuntos de números reales.

El texto continúa con dos situaciones que ejemplifican las definiciones de función real, Dominio, Rango, variable dependiente y variable independiente. En la primera, se enuncian situaciones en las que magnitudes dependen de otras y se representan por funciones matemáticas. Después, la nueva explicación, hace énfasis a la correspondencia entre elementos de dos conjuntos de números reales, haciendo uso de la función y se muestran tres tipos de representaciones, que se analizará líneas más adelante.

Si bien, dentro del libro de texto se enuncian situaciones que podrían originar campos de

problemas contextuales (la factura de teléfono, el consumo de gasolina de un vehículo depende de la velocidad del mismo, entre otros) a lo largo de la introducción de función, no se pasa más allá de enunciar en donde se puede encontrar de manera intuitiva la noción de función. Los campos de problemas se centran en justificar la definición presentada y con ello buscar que los estudiantes atiendan a las *proposiciones* con las que se espera identifiquen cuando la situación, expresada en diferentes registros de representación, expresan o no una función; además de tener presente en qué momento surge un dominio restringido.

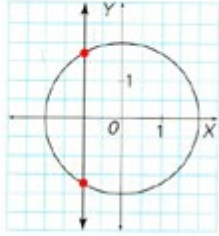
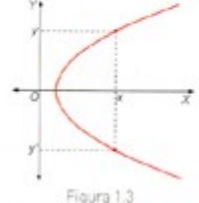
Un ejemplo de lo expuesto, se da con la referencia del criterio de la recta vertical para ser usada más adelante y descartar aquellas expresiones que no cumplen la condición.

■ Criterio de la recta vertical

Una manera de determinar si una gráfica representa una función, es trazar una recta vertical (perpendicular al eje X) que corte dicha gráfica; si la corta, en al menos dos puntos, entonces la gráfica corresponde a una relación que no es una función.

Ten en cuenta La gráfica de la figura 1.3 no representa una función, pues hay valores de x a los que les corresponde más de un valor de y.

Ejemplo 5 La gráfica de la expresión $x^2 + y^2 = 4$ corresponde a una circunferencia de centro en $(0, 0)$ y radio 2. Al trazar la recta vertical $x = -1$ (figura 1.4), se observa que corta la circunferencia en dos puntos distintos; por consiguiente, la gráfica corresponde a una relación que no es una función.

Actividad

Figura 8. Criterio de la recta vertical introducido en Tx-1 como una proposición que se tiene en cuenta en la configuración epistémica.

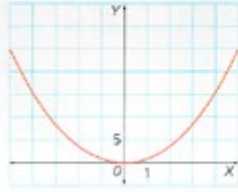
Lo anterior muestra que las diferentes *Definiciones o Conceptos* que se introducen en este apartado, son sobre la función de variable real, el dominio y rango de la función y los tipos de variables en una función. De este modo, se presupone que los estudiantes, deben estar en la capacidad de entender y atender a diferentes conceptos previos como conjuntos, subconjuntos, conjunto de números reales, relaciones, registros de representación como plano cartesiano y tabla de valores, entre otras definiciones previas, lo que indicaría que para el grado inmediatamente anterior se debieron trabajar dichos conceptos, debido a que en Tx-1 no se explicita ninguno de éstos.

En general dentro del capítulo, se evidencia que los *procedimientos* que debe llevar a cabo el estudiante están regidos por la definición de la noción de función como regla de correspondencia, con un dominio y rango definido. Así, el interés radica en establecer si una expresión dada en algunos tipos de representaciones son o no funciones, así como, calcular el dominio y rango de una función dada, de acuerdo a los ejemplos dados en el texto.

Para finalizar, los tipos de argumentos que se movilizan son del tipo explicativo; porque a través de ejemplos y contraejemplos, se busca

introducir, verificar o rechazar definiciones dadas. Por ejemplo, para ejemplificar la definición de función, dominio y rango, y variables dependientes e independientes, se introduce el siguiente ejemplo

Ejemplo 2 La función que a cada número real x le asigna su cuadrado puede expresarse matemáticamente con un enunciado, mediante una tabla de valores (tabla 1.1), una gráfica (figura 1.2), o bien por medio de la expresión algebraica $y = f(x) = x^2$, donde x es la variable independiente o y la variable dependiente.



x	...	-2	-1	0	0,5	1	2	10	...
$y = x^2$...	4	1	0	0,25	1	4	100	...

Tabla 1.1

La función anterior se puede calcular para cualquier valor real, por lo que $D(f) = \mathbb{R}$ y, como la imagen siempre es un número no negativo, $R(f) = [0, +\infty)$.

Figura 10. Ejemplificación de definiciones

CONSIDERACIONES FINALES

A partir de la descripción y el análisis llevado a cabo en el apartado anterior, se establece que tanto en los estándares básicos de competencias como en el libro de texto Tx-1 se trabajan solamente algunas configuraciones parciales, con respecto a la configuración epistémica establecida dentro del significado global de referencia.

De manera intuitiva, a partir de los datos, se evidencia que en la dupla, se asume que cada ciclo escolar, a medida que avanza, excluye o reduce el tratamiento de cierto tipo de lenguajes, porque los asume como previos. En este sentido, el currículo institucional, se expresa de manera Formal, de acuerdo a lo que explica Font y Godino (2006), pues los textos, abordan la función de una manera lógica conjuntista, buscando la generalización de la función en términos de relación entre conjuntos.

Por su parte, ya sea en mayor o menor medida, se activan diferentes tipos de representación, primando, de esta manera, las representaciones de tipo gráfico, tabular y simbólico. Sin embargo, se demuestra en el libro que la multiplicidad de representaciones que se activan lo hacen a través de situaciones que no tienen relación con el contexto del estudiante; si bien se enmarcan dentro de una situación matemática, las transformaciones se realizan para un cambio de visualización de datos, mas no para una elección en donde se exprese alguna acorde al contexto de la situación problemática.

En este sentido, a pesar que los estándares básicos de competencias, así como la configuración epistémica asociada al significado global de función, sugieren situaciones, proposiciones y argumentos en el contexto del alumno, se evidencia que en el libro de texto, las situaciones, referentes a casos cotidianos, son implementados para enunciar la existencia de una función, sin buscar que el estudiante valide o no el argumento, al enfrentarse ante alguna situación problemática.

REFERENCIAS

Bell, E. T. (1945). *The development of mathematics*. New York, United States: Mc Graw – Hill.

Biehler, R. (2005). Reconstruction of meaning as a didactical task: the concept of function as an example. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose (Eds), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 61 - 81). Dordrecht: Kluwer

Boyer, C. B. (1988) *A History of Mathematic*. (M. Martinez) Madrid, España: Alianza Editorial S.A. (Trabajo original publicado en 1968).

Cajori, F., (1894). *A History of Mathematics*. New York, United States: Macmillan and CO. Recuperado de <https://ia802705.us.archive.org/5/items/ahistorymathema01cajogoog/ahistorymathema01cajogoog.pdf>

Collette, J. P. (1986) *Historia de las matemáticas I*, México: Siglo XXI editores S.A.

Collette, J. P., (2000). *Historia de las matemáticas II*. México: Siglo XXI editors, s.a. de c.v.

D' Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Eves, H. J. (1990). *An introduction to the history of mathematics*, Orlando, United states: Saunders College Publishing.

Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. En Maz, Alexander; Gómez, Bernardo; Torralbo, Manuel (Eds.), *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 111-128). Córdoba: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Font, V. (Septiembre de 2013). Papel de la Teoría en la Investigación en Educación Matemática. *VII Congreso Iberoamericano en educación matemática*. Conferencia regular llevada a cabo por la Sociedad de Educación Matemática



Uruguay, Montevideo, Uruguay.

Font, V., Godino, J. D., y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97-124.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaj: Journal for the Study of Education and Development*, 33(1), 89-105.

Font, V., y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa*, 8 (1), 67-98

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 22, n. 2/3, pp. 237-284.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado de: URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_tfs.htm.

Godino, J. D. (2010). Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Tecnocientífica. *Universidad de Granada*. Descargado el 30 de junio de 2018 de: <http://www.ugr.es/~jgodino/>

Godino, J. D. (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: motivación, supuestos y herramientas teóricas. Universidad de Granada. Disponible en, http://enfoueoontosemitico.ugr.es/documentos/sintesis_EOS_2abril2016.pdf

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). Un Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. [Versión ampliada y

revisada del artículo: Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics Education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.]

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, XXVII (2), 221-252.

Godino, J. D., Font, V. (2007). Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos. [Anexo al artículo, Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), pp. 325-355.]

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., y Lurduy, O. (2009). Sistema de Prácticas y Configuraciones de Objetos y Procesos como Herramientas para el Análisis Semiótico en Educación Matemática. *Semiotic Approaches to Mathematics, the History of Mathematics and Mathematics Education – 3rd Meeting. Aristotle* (pp. 1- 22). University of Thessaloniki

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), pp. 325-355.

Hofmann, J. E. (2002). *Historia de la Matemática: desde el comienzo hasta la revolución francesa*. México: Editorial Limusa.S. S de C.V

Martínez, J. (2011). Métodos de Investigación Cualitativa. *Silogismo*, (08), 1-33

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Santa Fe de Bogotá. Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*.



Santa Fe de Bogotá. Colombia.

Parra, Y. E. (2015). *Significados pretendidos por el currículo de matemáticas Chileno sobre la noción de función*. (Tesis de maestría). Universidad de los Lagos, Santiago de Chile. Recuperado de https://www.dropbox.com/s/2yf2yj84cfn2z3n/TESIS%20MAG%C3%8DSTER_YOCELYN%20PARRA.pdf?dl=0

Pino - Fan, L. R., (2013). *Evaluación de la Faceta Epistémica del Conocimiento Didáctico – Matemático de Futuros Profesores de Bachillerato sobre la Derivada*. (Tesis Doctoral). Universidad de Granda.

Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D. y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *PARADIGMA*, 34(2), 123-150.

Ramos, A. B. (2005). *Objetos personales, matemáticos y didácticos, del profesorado y cambios institucionales. El caso de la contextualización de las funciones en una Facultad de Ciencias Económicas y Sociales*. (Tesis doctoral). Universitat de Barcelona

Ruiz, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Youschkevitch, A. P. (1976). The Concept of Function up to the Middle of the 19 Century. *Archive for the History of the Exact Sciences*, 16(1), 37-85.